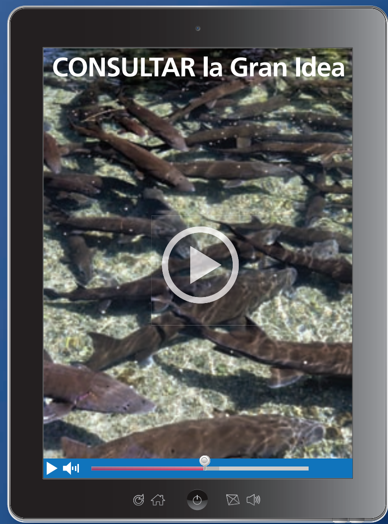
8 Secuencias y series

8.1 Definir y usar secuencias y series
8.2 Analizar secuencias y series aritméticas
8.3 Analizar secuencias y series geométricas
8.4 Hallar sumas de series geométricas infinitas
8.5 Usar reglas recurrentes con las secuencias

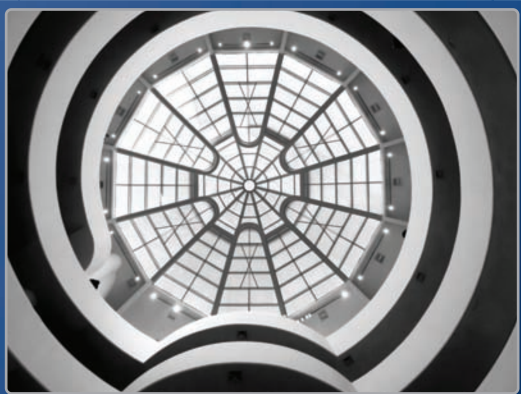
Vivero de árboles *(pág. 449)*



Población de peces *(pág. 445)*

Paracaidismo *(pág. 431)*

Banda escolar *(pág. 423)*



Tragaluz del museo *(pág. 416)*

Mantener el dominio de las matemáticas

Evaluar funciones

Ejemplo 1 **Evalúa la función $y = 2x^2 - 10$ para los valores $x = 0, 1, 2, 3$ y 4.**

Entrada, x	$2x^2 - 10$	Salida, y
0	$2(0)^2 - 10$	-10
1	$2(1)^2 - 10$	-8
2	$2(2)^2 - 10$	-2
3	$2(3)^2 - 10$	8
4	$2(4)^2 - 10$	22

Copia y completa la tabla para evaluar la función.

1. $y = 3 - 2^x$

x	y
1	
2	
3	

2. $y = 5x^2 + 1$

x	y
2	
3	
4	

3. $y = -4x + 24$

x	y
5	
10	
15	

Resolver ecuaciones

Ejemplo 2 **Resuelve la ecuación $45 = 5(3)^x$.**

$$45 = 5(3)^x$$ Escribe la ecuación original.

$$\frac{45}{5} = \frac{5(3)^x}{5}$$ Divide cada lado entre 5.

$$9 = 3^x$$ Simplifica.

$$\log_3 9 = \log_3 3^x$$ Saca $\log_3$ de cada lado

$$2 = x$$ Simplifica.

Resuelve la ecuación. Verifica tu(s) solución(es).

4. $7x + 3 = 31$

5. $\frac{1}{16} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

6. $216 = 3(x + 6)$

7. $2^x + 16 = 144$

8. $\frac{1}{4}x - 8 = 17$

9. $8\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{27}{8}$

10. **RAZONAMIENTO ABSTRACTO** La gráfica de la función de decremento exponencial $f(x) = b^x$ tiene una asíntota $y = 0$. ¿En qué se diferencia la gráfica de f de un diagrama de dispersión que consiste en los puntos $(1, b^1)$, $(2, b^1 + b^2)$, $(3, b^1 + b^2 + b^3)$, . . .? ¿En qué se parece la gráfica de f?

Prácticas matemáticas

Los estudiantes que dominan las matemáticas consideran las herramientas disponibles cuando resuelven un problema matemático.

Usar las herramientas apropiadas estratégicamente

Concepto Esencial

Usar una hoja de cálculo

Para usar una hoja de cálculo, es común escribir una celda como una función de otra celda. Por ejemplo, en la hoja de cálculo que se muestra, las celdas de la columna A, comenzando por la celda A2 contienen funciones de la celda de la fila anterior. También, las celdas de la columna B contienen funciones de las celdas de la misma fila en la columna A.

B1 = 2*A1 − 2

A2 = A1 + 1

	A	B
1	1	0
2	2	2
3	3	4
4	4	6
5	5	8
6	6	10
7	7	12
8	8	14

EJEMPLO 1 Usar una hoja de cálculo

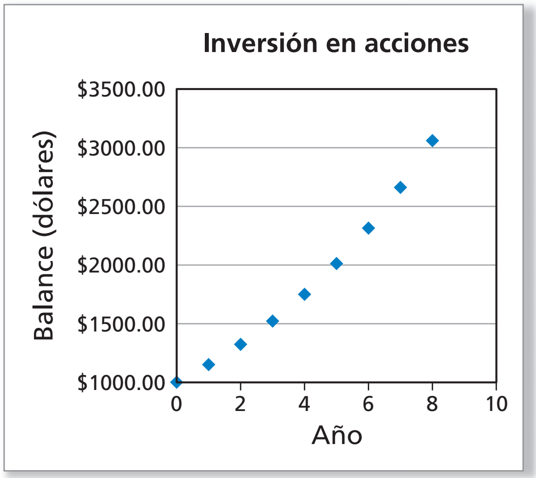
Depositas $1000 en acciones que ganan 15% de interés compuesto anualmente. Usa una hoja de cálculo para hallar el balance al final de cada año durante 8 años. Describe el tipo de crecimiento.

SOLUCIÓN

Puedes ingresar la información dada en una hoja de cálculo y generar la gráfica que se muestra. Basándote en la fórmula de la hoja de cálculo, puedes ver que el patrón de crecimiento es exponencial. La gráfica también parece ser exponencial.

	A	B
1	**Año**	**Balance**
2	0	$1000.00
3	1	$1150.00
4	2	$1322.50
5	3	$1520.88
6	4	$1749.01
7	5	$2011.36
8	6	$2313.06
9	7	$2660.02
10	8	$3059.02

B3 = B2*1.15



Monitoreo del progreso

Usa una hoja de cálculo para ayudarte a responder las preguntas.

1. Un piloto vuela un avión a una velocidad de 500 millas por hora durante 4 horas. Halla la distancia total recorrida en intervalos de 30 minutos. Describe el patrón.
2. Una población de 60 conejos aumenta en 25% cada año durante 8 años. Halla la población al final de cada año. Describe el tipo de crecimiento.
3. Una población en peligro de extinción tiene 500 miembros. La población disminuye en 10% cada década durante 80 años. Halla la población al final de cada década. Describe el tipo de disminución.
4. Los ocho primeros corredores que terminan una carrera reciben premios en efectivo. El primer lugar recibe $200, el segundo lugar recibe $175, el tercer lugar recibe $150, y así sucesivamente. Halla los premios del quinto al octavo lugar. Describe el tipo de disminución.

8.1 Definir y usar secuencias y series

Pregunta esencial

¿Cómo puedes escribir una regla para el enésimo término de una secuencia?

Una **secuencia** es una lista ordenada de números. Puede haber un número limitado o un número infinito de *términos* de una secuencia.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ Términos de una secuencia

A continuación, encontrarás un ejemplo.

$1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$

CONSTRUIR ARGUMENTOS VIABLES

Para dominar las matemáticas, necesitas razonar inductivamente acerca de los datos.

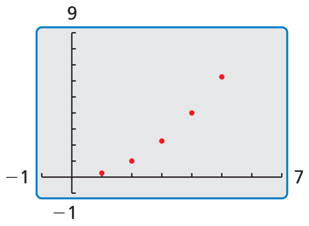
EXPLORACIÓN 1 Escribir las reglas para una secuencia

Trabaja con un compañero. Une cada secuencia con su gráfica. Los ejes horizontales representan n, la posición de cada término en la secuencia. Luego escribe una regla para el enésimo término de la secuencia, y usa la regla para hallar a_{10}.

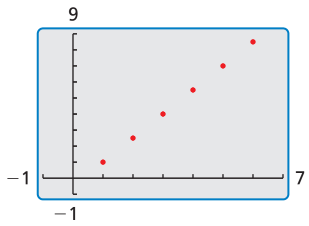
a. $1, 2.5, 4, 5.5, 7, \ldots$ **b.** $8, 6.5, 5, 3.5, 2, \ldots$ **c.** $\frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{9}{4}, \frac{16}{4}, \frac{25}{4}, \ldots$

d. $\frac{25}{4}, \frac{16}{4}, \frac{9}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ **e.** $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots$ **f.** $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

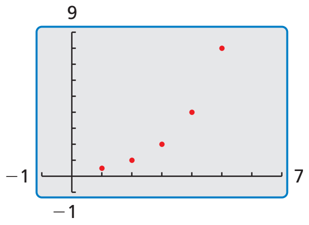
A.



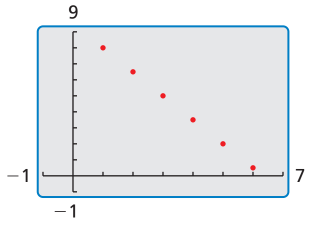
B.



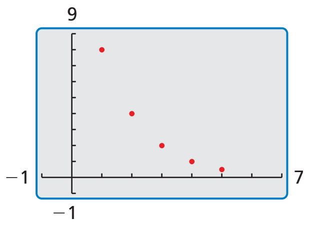
C.



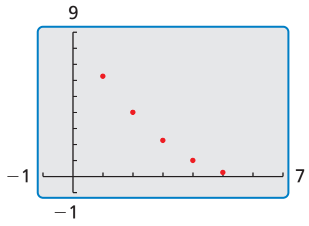
D.



E.



F.



Comunicar tu respuesta

2. ¿Cómo puedes escribir una regla para el enésimo término de una secuencia?

3. ¿Qué observas sobre la relación entre los términos en (a) una secuencia aritmética y (b) una secuencia geométrica? Justifica tus respuestas.

8.1 Lección

Qué aprenderás

- Usar la notación secuencial para escribir términos de secuencias.
- Escribir una regla para el enésimo término de una secuencia.
- Sumar los términos de una secuencia para obtener una serie y usar la notación de sumatoria.

Vocabulario Esencial

secuencia, *pág. 410*
términos de una secuencia, *pág. 410*
serie, *pág. 412*
notación de sumatoria, *pág. 412*
notación sigma, *pág. 412*

Anterior
dominio
rango

Escribir los términos de una secuencia

Concepto Esencial

Secuencias

Una **secuencia** es una lista ordenada de números. Una *secuencia finita* es una función que tiene un número limitado de términos y cuyo dominio es el conjunto finito$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Los valores en el rango se denominan los **términos** de la secuencia.

Dominio:	1	2	3	4	. . .	n	Posición relativa de cada término
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	
Rango:	a_1	a_2	a_3	a_4	. . .	a_n	Términos de la secuencia

Una *secuencia infinita* es una función que continúa sin detenerse y cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. A continuación encontrarás ejemplos de una secuencia finita y de una secuencia infinita.

Secuencia finita 2, 4, 6, 8 **Secuencia infinita** 2, 4, 6, 8, . . .

Una secuencia se puede especificar mediante una ecuación, o *regla*. Por ejemplo, ambas secuencias de arriba se pueden describir mediante la regla $a_n = 2n$ o $f(n) = 2n$.

El dominio de una secuencia puede comenzar con 0 en vez de 1. Si este es el caso, el dominio de una secuencia finita es el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ y el dominio de una secuencia infinita se convierte en el conjunto de enteros no negativos. A no ser que se indique lo contrario, supón que el dominio de una secuencia comienza con 1.

EJEMPLO 1 **Escribir los términos de las secuencias**

Escribe los primeros seis términos de (a) $a_n = 2n + 5$ y (b) $f(n) = (-3)^{n-1}$.

SOLUCIÓN

a. $a_1 = 2(1) + 5 = 7$	1^er término	**b.** $f(1) = (-3)^{1-1} = 1$
$a_2 = 2(2) + 5 = 9$	2^do término	$f(2) = (-3)^{2-1} = -3$
$a_3 = 2(3) + 5 = 11$	3^er término	$f(3) = (-3)^{3-1} = 9$
$a_4 = 2(4) + 5 = 13$	4^to término	$f(4) = (-3)^{4-1} = -27$
$a_5 = 2(5) + 5 = 15$	5^to término	$f(5) = (-3)^{5-1} = 81$
$a_6 = 2(6) + 5 = 17$	6^to término	$f(6) = (-3)^{6-1} = -243$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe los primeros seis términos de la secuencia.

1. $a_n = n + 4$ **2.** $f(n) = (-2)^{n-1}$ **3.** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

CONSEJO DE ESTUDIO

Si te dan solo los primeros términos de una secuencia, es posible que haya más de una regla para el enésimo término. Por ejemplo, la secuencia 2, 4, 8,. . . se puede dar mediante $a_n = 2^n$ o $a_n = n^2 - n + 2$.

Escribir las reglas para las secuencias

Cuando los términos de una secuencia tienen un patrón reconocible, es posible que puedas escribir una regla para el enésimo término de la secuencia.

EJEMPLO 2 Escribir las reglas para las secuencias

Describe el patrón, escribe el siguiente término y escribe una regla para el enésimo término de las secuencias (a) $-1, -8, -27, -64, \ldots$ y (b) $0, 2, 6, 12, \ldots$.

SOLUCIÓN

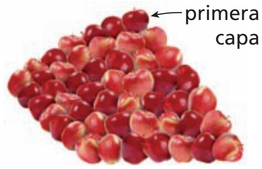
a. Puedes escribir los términos como $(-1)^3, (-2)^3, (-3)^3, (-4)^3, \ldots$. El siguiente término es $a_5 = (-5)^3 = -125$. Una regla para el enésimo término es $a_n = (-n)^3$.

b. Puedes escribir los términos como $0(1), 1(2), 2(3), 3(4), \ldots$ El siguiente término es $f(5) = 4(5) = 20$. Una regla para el enésimo término es $f(n) = (n - 1)n$.

Para hacer la gráfica de la secuencia, imagina que el eje horizontal representa los números de posición (el dominio) y el eje vertical representa los términos (el rango).

EJEMPLO 3 Resolver un problema de la vida real

Trabajas en un supermercado y apilas manzanas en forma de una pirámide cuadrada de 7 capas. Escribe una regla para el número de manzanas en cada capa. Luego haz la gráfica de la secuencia.



SOLUCIÓN

Paso 1 Haz una tabla que muestre el número de frutas en las primeras tres capas. Imagina que a_n representa el número de manzanas en la capa n.

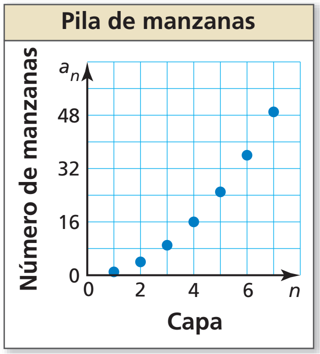
Capa, n	1	2	3
Número de manzanas, a_n	 $1 = 1^2$	 $4 = 2^2$	 $9 = 3^2$

ERROR COMÚN

Aunque los puntos marcados en el Ejemplo 3 siguen una curva, no dibujes la curva porque la secuencia está definida solamente por los valores enteros de n, específicamente $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, y 7.

Paso 2 Escribe una regla para el número de manzanas en cada capa. Basándote en la tabla, puedes ver que $a_n = n^2$.

Paso 3 Marca los puntos (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36), y (7, 49). La gráfica se muestra a la derecha.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Describe el patrón, escribe el siguiente término, haz la gráfica de los cinco primeros términos, y escribe una regla para el enésimo término de la secuencia.

4. 3, 5, 7, 9, . . .

5. 3, 8, 15, 24, . . .

6. 1, −2, 4, −8, . . .

7. 2, 5, 10, 17, . . .

8. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 3, supón que hay nueve capas de manzanas. ¿Cuántas manzanas hay en la novena capa?

Escribir las reglas para las secuencias

Concepto Esencial

Series y notación de sumatoria

Cuando los términos de una secuencia se suman, la expresión resultante es una **serie**. Una serie puede ser finita o infinita.

Serie finita: $2 + 4 + 6 + 8$

Serie infinita: $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots$

Puedes usar la **notación de sumatoria** para escribir una serie. Por ejemplo, las dos series de arriba se pueden escribir en notación de sumatoria de la siguiente manera:

Serie finita: $2 + 4 + 6 + 8 = \sum_{i=1}^{4} 2i$

Serie infinita: $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 2i$

Para ambas series, el *índice de sumatoria* es i y el *límite inferior de la sumatoria* es 1. El *límite superior de la sumatoria* es 4 para la serie finita e ∞ (infinito) para la serie infinita. La notación de sumatoria también se denomina **notación sigma** porque usa la letra griega *sigma* en mayúscula, que se escribe Σ.

LEER

Cuando se escribe en notación de sumatoria, esta serie se lee como "la suma de $2i$ para valores de i del 1 al 4".

EJEMPLO 4 Escribir una serie usando la notación de sumatoria

Escribe cada serie usando la notación de sumatoria.

a. $25 + 50 + 75 + \cdots + 250$

b. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$

SOLUCIÓN

a. Observa que el primer término es 25(1), el segundo es 25(2), el tercero es 25(3), y el último es 25(10). Entonces, los términos de la serie se pueden escribir como:

$a_i = 25i$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$

El límite inferior de la sumatoria es 1 y el límite superior de la sumatoria es 10.

▶ La notación de sumatoria para la serie es $\sum_{i=1}^{10} 25i$.

b. Observa que para cada término, el denominador de la fracción es 1 más que el numerador. Entonces, los términos de la serie se pueden escribir como:

$a_i = \frac{i}{i+1}$, donde $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$

El límite inferior de la sumatoria es 1 y el límite superior de la sumatoria es infinito.

▶ La notación de sumatoria para la serie es $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe la serie usando la notación de sumatoria.

9. $5 + 10 + 15 + \cdots + 100$

10. $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{9}{10} + \frac{16}{17} + \cdots$

11. $6 + 36 + 216 + 1296 + \cdots$

12. $5 + 6 + 7 + \cdots + 12$

ERROR COMÚN

Asegúrate de usar los límites inferiores y superiores correctos de la sumatoria al hallar la suma de una serie.

El índice de sumatoria para una serie no tiene que ser i–se puede usar cualquier letra. También, el índice no tiene que comenzar en 1. Por ejemplo, el índice comienza en 4 en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Hallar la suma de una serie

Halla la suma $\sum_{k=4}^{8}(3 + k^2)$.

SOLUCIÓN

$$\sum_{k=4}^{8}(3 + k^2) = (3 + 4^2) + (3 + 5^2) + (3 + 6^2) + (3 + 7^2) + (3 + 8^2)$$
$$= 19 + 28 + 39 + 52 + 67$$
$$= 205$$

Para las series que tienen muchos términos, hallar la suma sumando los términos puede ser tedioso. A continuación tienes fórmulas que puedes usar para hallar las sumas de tres tipos especiales de series.

Concepto Esencial

Fórmulas para series especiales

Suma de n términos de 1: $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

Suma de primeros enteros positivos n: $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suma de cuadrados de los primeros enteros positivos n: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EJEMPLO 6 Usar una fórmula para una suma

¿Cuántas manzanas hay en la pila del Ejemplo 3?

SOLUCIÓN

Basándote en el Ejemplo 3, sabes que el $i$ésimo término de la serie está dado por $a_i = i^2$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots, 7$. Usando la notación de sumatoria y la tercera fórmula enumerada arriba, puedes hallar el número total de manzanas de la siguiente manera:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 7^2 = \sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{7(7+1)(2 \cdot 7 + 1)}{6} = \frac{7(8)(15)}{6} = 140$$

▶ Hay 140 manzanas en la pila. Verifícalo sumando el número de manzanas en cada una de las siete capas.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla la suma.

13. $\sum_{i=1}^{5} 8i$

14. $\sum_{k=3}^{7}(k^2 - 1)$

15. $\sum_{i=1}^{34} 1$

16. $\sum_{k=1}^{6} k$

17. **¿QUÉ PASA SI?** Supón que hay nueve capas en la pila del Ejemplo 3. ¿Cuántas manzanas hay en la pila?

8.1 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **VOCABULARIO** ¿De qué otra manera se denomina la notación de sumatoria?

2. **COMPLETAR LA ORACIÓN** En una secuencia, los números se denominan __________ de la secuencia.

3. **ESCRIBIR** Compara las secuencias y las series.

4. **¿CUÁL NO CORRESPONDE?** ¿Cuál *no* pertenece al grupo de las otras tres? Explica tu razonamiento.

$\sum_{i=1}^{6} i^2$	91	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$	$\sum_{i=0}^{5} i^2$

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

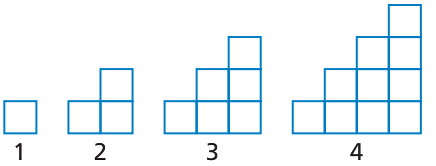
En los Ejercicios 5–14, escribe los primeros seis términos de la secuencia. *(Consulta el Ejemplo 1).*

5. $a_n = n + 2$
6. $a_n = 6 - n$
7. $a_n = n^2$
8. $f(n) = n^3 + 2$
9. $f(n) = 4^{n-1}$
10. $a_n = -n^2$
11. $a_n = n^2 - 5$
12. $a_n = (n + 3)^2$
13. $f(n) = \dfrac{2n}{n + 2}$
14. $f(n) = \dfrac{n}{2n - 1}$

En los Ejercicios 15–26, describe el patrón, escribe el siguiente término, y escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. *(Consulta el Ejemplo 2).*

15. 1, 6, 11, 16, . . .
16. 1, 2, 4, 8, . . .
17. 3.1, 3.8, 4.5, 5.2, . . .
18. 9, 16.8, 24.6, 32.4, . . .
19. 5.8, 4.2, 2.6, 1, −0.6 . . .
20. −4, 8, −12, 16, . . .
21. $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \ldots$
22. $\frac{1}{10}, \frac{3}{20}, \frac{5}{30}, \frac{7}{40}, \ldots$
23. $\frac{2}{3}, \frac{2}{6}, \frac{2}{9}, \frac{2}{12}, \ldots$
24. $\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{5}, \frac{8}{6}, \ldots$
25. 2, 9, 28, 65, . . .
26. 1.2, 4.2, 9.2, 16.2, . . .

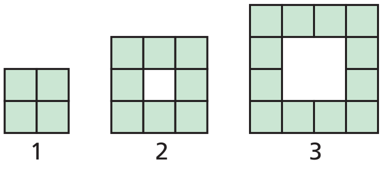
27. **HALLAR UN PATRÓN** ¿Qué regla da el número total de cuadrados en la enésima figura del patrón que se muestra? Justifica tu respuesta.



Ⓐ $a_n = 3n - 3$ Ⓑ $a_n = 4n - 5$

Ⓒ $a_n = n$ Ⓓ $a_n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

28. **HALLAR UN PATRÓN** ¿Qué regla da el número total de cuadrados verdes en la enésima figura del patrón que se muestra? Justifica tu respuesta.



Ⓐ $a_n = n^2 - 1$ Ⓑ $a_n = \dfrac{n^2}{2}$

Ⓒ $a_n = 4n$ Ⓓ $a_n = 2n + 1$

29. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Se colocan mesas rectangulares uniendo sus bordes cortos, tal como se muestra en el diagrama. Escribe una regla para el número de personas que se pueden sentar alrededor de n mesas dispuestas de esta manera. Luego haz una gráfica de la secuencia. *(Consulta el Ejemplo 3).*

30. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Un empleado de una empresa de construcción gana \$33,000 durante su primer año en el empleo. Los empleados de la compañía reciben aumentos de \$2,400 cada año. Escribe una regla para el salario del empleado cada año. Luego haz una gráfica de la secuencia.

En los Ejercicios 31–38, escribe la serie usando la notación de sumatoria. *(Consulta el Ejemplo 4).*

31. $7 + 10 + 13 + 16 + 19$

32. $5 + 11 + 17 + 23 + 29$

33. $4 + 7 + 12 + 19 + \cdots$

34. $-1 + 2 + 7 + 14 + \cdots$

35. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$

36. $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} + \cdots$

37. $-3 + 4 - 5 + 6 - 7$

38. $-2 + 4 - 8 + 16 - 32$

En los Ejercicios 39–50, halla la suma. *(Consulta los Ejemplo 5 y 6).*

39. $\sum_{i=1}^{6} 2i$

40. $\sum_{i=1}^{5} 7i$

41. $\sum_{n=0}^{4} n^3$

42. $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$

43. $\sum_{k=3}^{6} (5k - 2)$

44. $\sum_{n=1}^{5} (n^2 - 1)$

45. $\sum_{i=2}^{8} \frac{2}{i}$

46. $\sum_{k=4}^{6} \frac{k}{k + 1}$

47. $\sum_{i=1}^{35} 1$

48. $\sum_{n=1}^{16} n$

49. $\sum_{i=10}^{25} i$

50. $\sum_{n=1}^{18} n^2$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 51 y 52, describe y corrige el error cometido al hallar la suma de la serie.**

51. ✗
$$\sum_{n=1}^{10} (3n - 5) = -2 + 1 + 4 + 7 + 10$$
$$= 20$$

52. ✗
$$\sum_{i=2}^{4} i^2 = \frac{4(4 + 1)(2 \cdot 4 + 1)}{6}$$
$$= \frac{180}{6}$$
$$= 30$$

53. **RESOLVER PROBLEMAS** Quieres ahorrar \$500 para un viaje escolar. Comienzas ahorrando un centavo el primer día. Ahorras un centavo adicional cada día después de eso. Por ejemplo, ahorrarás dos centavos el segundo día, tres centavos el tercer día, y así sucesivamente.

   a. ¿Cuánto dinero habrás ahorrado después de 100 días?

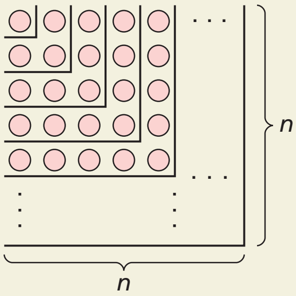
   b. Usa una serie para determinar cuántos días te demoras en ahorrar \$500.

54. **REPRESENTAR CON MATERMÁTICAS** Comienzas un programa de ejercicios. La primera semana haces 25 flexiones. Cada semana haces 10 flexiones más que la semana anterior. ¿Cuántas flexiones harás en la novena semana? Justifica tu respuesta.

55. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Para una exhibición en una tienda de artículos deportivos, apilas pelotas de fútbol en una pirámide cuya base es un triángulo equilátero de cinco capas. Escribe una regla para el número de pelotas de fútbol en cada capa. Luego haz una gráfica de la secuencia.

56. ¿CÓMO LO VES? Usa el diagrama para determinar la suma de la serie. Explica tu razonamiento.

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = ?$



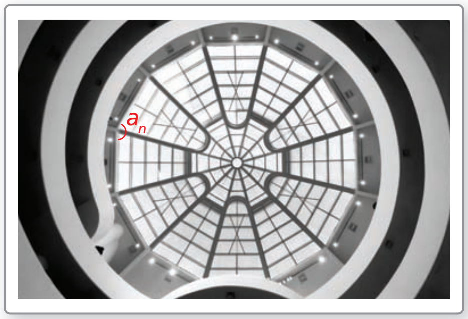
57. ARGUMENTAR Usas una calculadora para evaluar $\sum_{i=3}^{1659} i$ porque el límite inferior de la sumatoria es 3, no 1. Tu amigo dice que hay una manera de usar la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Explica.

58. CONEXIONES MATEMÁTICAS Un polígono *regular* tiene medidas iguales de sus ángulos y longitudes iguales de sus lados. Para un polígono regular de n lados ($n \geq 3$), la medida de a_n de un ángulo interior está dada por $a_n = \dfrac{180(n - 2)}{n}$.

a. Escribe los primeros cinco términos de la secuencia.

b. Escribe una regla para la secuencia dando la suma T_n de las medidas de los ángulos interiores en cada polígono regular de n lados.

c. Usa tu regla en la parte (b) para hallar la suma de las medidas del ángulo interior en el tragaluz del Museo Guggenheim, que es un dodecágono regular.



Tragaluz del Museo Guggenheim

59. USAR LA ESTRUCTURA Determina si cada enunciado es verdadero. Si es así, haz una demostración. Si no, haz un contraejemplo.

a. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

b. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

c. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$

d. $\sum_{i=1}^{n} (a_i)^c = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^c$

60. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO En esta sección, aprendiste las siguientes fórmulas.

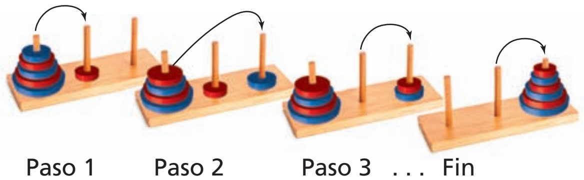
$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Escribe una fórmula para la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos.

61. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS En el acertijo llamado Las Torres de Hanói, el objeto es usar una serie de movidas para llevar los anillos de una estaca y apilarlos en orden en otra estaca. Una movida consiste en mover exactamente un anillo, y ningún anillo puede colocarse sobre un anillo más pequeño. El número mínimo a_n de movidas necesarias para mover n anillos es 1 para 1 anillo, 3 para 2 anillos, 7 para 3 anillos, 15 para 4 anillos, y 31 para 5 anillos.



a. Escribe una regla para la secuencia.

b. ¿Cuál es el número mínimo de movidas necesarias para mover 6 anillos? ¿Y 7 anillos? ¿Y 8 anillos?

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Resuelve el sistema. Verifica tu solución. *(Sección 1.4)*

62. $2x - y - 3z = 6$
$x + y + 4z = -1$
$3x - 2z = 8$

63. $2x - 2y + z = 5$
$-2x + 3y + 2z = -1$
$x - 4y + 5z = 4$

64. $2x - 3y + z = 4$
$x - 2z = 1$
$y + z = 2$

8.2 Analizar secuencias y series aritméticas

Pregunta esencial

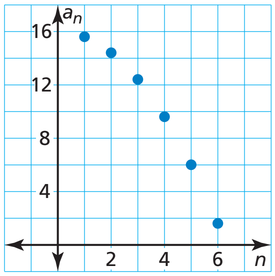
¿Cómo puedes reconocer una secuencia aritmética basándote en su gráfica?

En una **secuencia aritmética**, la diferencia de los términos consecutivos, denominada *diferencia común*, es constante. Por ejemplo, en la secuencia aritmética 1, 4, 7, 10,…, la diferencia común es 3.

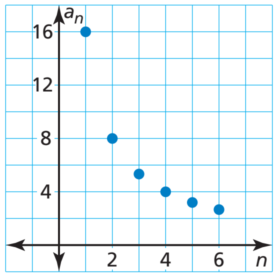
EXPLORACIÓN 1 Reconocer gráficas de secuencias aritméticas

Trabaja con un compañero. Determina si cada gráfica muestra una secuencia aritmética. Si es así, entonces escribe una regla para el enésimo término de la secuencia y usa una hoja de cálculo para hallar la suma de los primeros 20 términos. ¿Qué observas acerca de la gráfica de una secuencia aritmética?

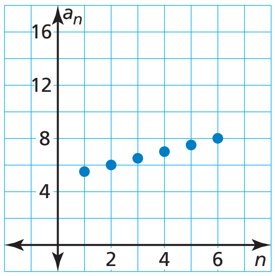
a.



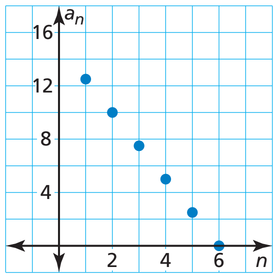
b.



c.



d.



EXPLORACIÓN 2 Hallar la suma de una secuencia aritmética

RAZONAR DE MANERA ABSTRACTA

Para dominar las matemáticas, necesitas darle sentido a las cantidades y a sus relaciones en las situaciones de problemas.

Trabaja con un compañero. Un maestro del matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855) le pidió hallar la suma de todos los números enteros de 1 a 100. Para asombro de su maestro, Gauss obtuvo la respuesta después de breves momentos. Esto fue lo que hizo Gauss:

$$\begin{array}{rcrcrcccr} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 \end{array} \qquad \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Explica el proceso de pensamiento de Gauss. Luego escribe una fórmula para la suma S_n de los primeros n términos de una secuencia aritmética. Verifica tu fórmula hallando las sumas de los primeros 20 términos de las secuencias aritméticas en la Exploración 1. Compara tus respuestas con aquellas que obtuviste usando una hoja de cálculo.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes reconocer una secuencia aritmética basándote en su gráfica?

4. Halla la suma de los términos de cada secuencia aritmética.

a. 1, 4, 7, 10, . . . , 301 **b.** 1, 2, 3, 4, . . . , 1000 **c.** 2, 4, 6, 8, . . . , 800

8.2 Lección

Qué aprenderás

- Identificar secuencias aritméticas.
- Escribir reglas para secuencias aritméticas.
- Hallar sumas de series aritméticas finitas.

Vocabulario Esencial

secuencia aritmética, *pág. 418*
diferencia común, *pág. 418*
serie aritmética, *pág. 420*

Anterior
función lineal
media

Identificar secuencias aritméticas

En una **secuencia aritmética,** la diferencia de los términos consecutivos es constante. Esta diferencia constante se denomina **diferencia común** y se denota mediante d.

EJEMPLO 1 Identificar secuencias aritméticas

Indica si cada secuencia es aritmética.

a. $-9, -2, 5, 12, 19, \ldots$ **b.** $23, 15, 9, 5, 3, \ldots$

SOLUCIÓN

Halla las diferencias de los términos consecutivos.

a. $a_2 - a_1 = -2 - (-9) = 7$

$a_3 - a_2 = 5 - (-2) = 7$

$a_4 - a_3 = 12 - 5 = 7$

$a_5 - a_4 = 19 - 12 = 7$

▶ Cada diferencia es 7, entonces la secuencia es aritmética.

b. $a_2 - a_1 = 15 - 23 = -8$

$a_3 - a_2 = 9 - 15 = -6$

$a_4 - a_3 = 5 - 9 = -4$

$a_5 - a_4 = 3 - 5 = -2$

▶ Las diferencias *no* son constantes, entonces la secuencia no es aritmética.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Indica si la secuencia es aritmética. Explica tu razonamiento.

1. $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ **2.** $15, 9, 3, -3, -9, \ldots$ **3.** $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

Escribir las reglas para las secuencias aritméticas

Concepto Esencial

Regla para una secuencia aritmética

Álgebra El enésimo término de una secuencia aritmética cuyo primer término es a_1 y su diferencia común d está dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Ejemplo El enésimo término de una secuencia aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia común es 2 está dado por:

$$a_n = 3 + (n - 1)2, \text{ o } a_n = 2n + 1$$

ERROR COMÚN

En la regla general para una secuencia aritmética, nota que la diferencia común d se multiplica por $n - 1$, no por n.

EJEMPLO 2 Escribir una regla para el enésimo término

Escribe una regla para el enésimo término de cada secuencia. Luego halla a_{15}.

a. 3, 8, 13, 18, . . . **b.** 55, 47, 39, 31, . . .

SOLUCIÓN

a. La secuencia es aritmética, con el primer término $a_1 = 3$, y la diferencia común $d = 8 - 3 = 5$. Entonces, una regla para el enésimo término es

$a_n = a_1 + (n - 1)d$	Escribe la regla general.
$= 3 + (n - 1)5$	Sustituye 3 por a_1 y 5 por d.
$= 5n - 2.$	Simplifica.

▶ Una regla $a_n = 5n - 2$, y el decimoquinto término es $a_{15} = 5(15) - 2 = 73$.

b. La secuencia es aritmética, con el primer término $a_1 = 55$, y la diferencia común $d = 47 - 55 = -8$. Entonces, una regla para el enésimo término es

$a_n = a_1 + (n - 1)d$	Escribe la regla general.
$= 55 + (n - 1)(-8)$	Sustituye 55 por a_1 y -8 por d.
$= -8n + 63.$	Simplifica.

▶ Una regla es $a_n = -8n + 63$, y el decimoquinto término es $a_{15} = -8(15) + 63 = -57$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia 7, 11, 15, 19, . . . Luego halla a_{15}.

EJEMPLO 3 Escribir una regla dado un término y una diferencia común

Un término de una secuencia aritmética es $a_{19} = -45$. La diferencia común es $d = -3$. Escribe una regla para el enésimo término. Luego haz la gráfica de los primeros seis términos de la secuencia.

SOLUCIÓN

Paso 1 Usa la regla general para hallar el primer término.

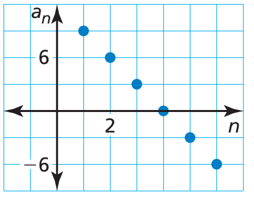
$a_n = a_1 + (n - 1)d$	Escribe la regla general.
$a_{19} = a_1 + (19 - 1)d$	Sustituye 19 por n.
$-45 = a_1 + 18(-3)$	Sustituye -45 por a_{19} y -3 por d.
$9 = a_1$	Resuelve para hallar a_1.

Paso 2 Escribe una regla para el enésimo término.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$	Escribe la regla general.
$= 9 + (n - 1)(-3)$	Sustituye 9 por a_1 y -3 por d.
$= -3n + 12$	Simplifica.

Paso 3 Usa la regla para crear una tabla de valores para la secuencia. Luego marca los puntos.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	9	6	3	0	-3	-6



ANALIZAR RELACIONES

Nota que los puntos pertenecen a una línea. Esto es verdadero para toda secuencia aritmética. Entonces, una secuencia aritmética es una función lineal cuyo dominio es un subconjunto de los enteros. También puedes usar la notación de función para escribir secuencias:

$$f(n) = -3n + 12.$$

EJEMPLO 4 Escribir una regla dados dos términos

Dos términos de una secuencia aritmética son $a_7 = 17$ y $a_{26} = 93$. Escribe una regla para el enésimo término.

SOLUCIÓN

Paso 1 Escribe un sistema de ecuaciones usando $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Sustituye 26 por n para escribir la Ecuación 1. Sustituye 7 por n para escribir la Ecuación 2.

$a_{26} = a_1 + (26 - 1)d \Rightarrow 93 = a_1 + 25d$ Ecuación 1

$a_7 = a_1 + (7 - 1)d \Rightarrow 17 = a_1 + 6d$ Ecuación 2

Paso 2 Resuelve el sistema.

$76 = 19d$ Resta.

$4 = d$ Resuelve para hallar d.

$93 = a_1 + 25(4)$ Sustituye por d en la Ecuación 1.

$-7 = a_1$ Resuelve para hallar a_1.

Paso 3 Escribe una regla para a_n.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ Escribe la regla general.

$= -7 + (n - 1)4$ Sustituye por a_1 y d.

$= 4n - 11$ Simplifica.

Verifica

Usa la regla para verificar que el séptimo término sea 17 y el vigésimo sexto término sea 93.

$a_7 = 4(7) - 11 = 17$ ✓

$a_{26} = 4(26) - 11 = 93$ ✓

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. Luego haz una gráfica de los primeros seis términos de la secuencia.

5. $a_{11} = 50, d = 7$

6. $a_7 = 71, a_{16} = 26$

Hallar sumas de series aritméticas finitas

La expresión formada al sumar los términos de una secuencia aritmética se denomina **serie aritmética**. La suma de los primeros n términos de una serie aritmética se denota mediante S_n. Para hallar una regla para S_n, puedes escribir S_n de dos maneras diferentes y sumar los resultados.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + a_1$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)}_{(a_1 + a_n) \text{ se suma } n \text{ veces.}}$$

Puedes llegar a la conclusión de que $2S_n = n(a_1 + a_n)$, que lleva al siguiente resultado.

Concepto Esencial

La suma de una serie aritmética finita

La suma de los primeros n términos de una serie aritmética es

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).$$

En palabras, S_n es la media del primer y de los enésimos términos, multiplicada por el número de términos.

EJEMPLO 5 Hallar la suma de una serie aritmética

Halla la suma $\sum_{i=1}^{20}(3i + 7)$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Halla el primero y el último término.

$$a_1 = 3(1) + 7 = 10 \quad \text{Identifica el primer término.}$$

$$a_{20} = 3(20) + 7 = 67 \quad \text{Identifica el último término.}$$

Paso 2 Halla la suma.

$$S_{20} = 20\left(\frac{a_1 + a_{20}}{2}\right) \quad \text{Escribe la regla para } S_{20}.$$

$$= 20\left(\frac{10 + 67}{2}\right) \quad \text{Sustituye 10 por } a_1 \text{ y 67 por } a_{20}.$$

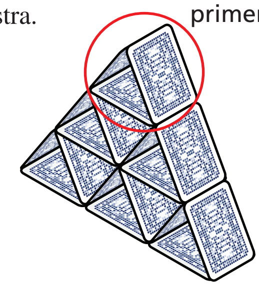
$$= 770 \quad \text{Simplifica.}$$

CONSEJO DE ESTUDIO

Esta suma es en realidad una suma *parcial*. No puedes hallar la suma completa de una serie aritmética infinita porque sus términos continúan indefinidamente.

EJEMPLO 6 Resolver un problema de la vida real

Estás haciendo un castillo de naipes similar al que se muestra.



a. Escribe una regla para el número de cartas en la enésima fila si la fila superior es la fila 1.

b. ¿Cuántas cartas necesitas para hacer un castillo de naipes de 12 filas?

SOLUCIÓN

a. Comenzando por la fila superior, el número de cartas en las filas son 3, 6, 9, 12,… Estos números forman una secuencia aritmética con un primer término de 3 y cuya diferencia común es 3. Entonces, una regla para la secuencia es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{Escribe la regla general.}$$

$$= 3 + (n - 1)(3) \quad \text{Sustituye 3 por } a_1 \text{ y 3 por } d.$$

$$= 3n \quad \text{Simplifica.}$$

b. Halla la suma de una serie aritmética cuyo primer término es $a_1 = 3$ y su último término es $a_{12} = 3(12) = 36$.

$$S_{12} = 12\left(\frac{a_1 + a_{12}}{2}\right) = 12\left(\frac{3 + 36}{2}\right) = 234$$

▶ Entonces, necesitas 234 cartas para hacer un castillo de naipes de 12 filas.

Verifica

Usa una calculadora gráfica para verificar la suma.

```
suma(secuencia(3X,X,
1,12))
                  234
```

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla la suma.

7. $\sum_{i=1}^{10} 9i$

8. $\sum_{k=1}^{12}(7k + 2)$

9. $\sum_{n=1}^{20}(-4n + 6)$

10. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 6, ¿cuántas cartas necesitas para hacer un castillo de naipes de 8 filas?

8.2 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. COMPLETAR LA ORACIÓN La diferencia constante entre los términos consecutivos de una secuencia aritmética se denomina ________________.

2. DISTINTAS PALABRAS, LA MISMA PREGUNTA ¿Cuál es diferente? Halla "ambas" respuestas.

¿Qué secuencia consiste en todos los números impares positivos?

¿Qué secuencia comienza con 1 y tiene una diferencia común de 2?

¿Qué secuencia tiene un enésimo término de $a_n = 1 + (n - 1)2$?

¿Qué secuencia tiene un enésimo término de $a_n = 2n + 1$?

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–10, indica si la secuencia es aritmética. Explica tu razonamiento. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $1, -1, -3, -5, -7, \ldots$ **4.** $12, 6, 0, -6, -12, \ldots$

5. $5, 8, 13, 20, 29, \ldots$ **6.** $3, 5, 9, 15, 23, \ldots$

7. $36, 18, 9, \frac{9}{2}, \frac{9}{4}, \ldots$ **8.** $81, 27, 9, 3, 1, \ldots$

9. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$ **10.** $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \ldots$

11. ESCRIBIR ECUACIONES Escribe una regla para la secuencia aritmética con la descripción dada.

a. El primer término es -3 y cada término es de 6 menos que el término anterior.

b. El primer término es 7 y cada término es de 5 más que el término anterior.

12. ESCRIBIR Compara los términos de una secuencia aritmética si $d > 0$ con si $d < 0$.

En los Ejercicios 13–20, escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. Luego halla a_{20}. *(Consulta el Ejemplo 2).*

13. $12, 20, 28, 36, \ldots$ **14.** $7, 12, 17, 22, \ldots$

15. $51, 48, 45, 42, \ldots$ **16.** $86, 79, 72, 65, \ldots$

17. $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \ldots$ **18.** $-2, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

19. $2.3, 1.5, 0.7, -0.1, \ldots$ **20.** $11.7, 10.8, 9.9, 9, \ldots$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 21 y 22, describe y corrige el error cometido al escribir una regla para el enésimo término de la secuencia aritmética 22, 9, −4, −17, −30, . . .**

21.

✗ Usa $a_1 = 22$ y $d = -13$.

$a_n = a_1 + nd$

$a_n = 22 + n(-13)$

$a_n = 22 - 13n$

22.

✗ El primer término es 22 y la diferencia común es -13.

$a_n = -13 + (n - 1)(22)$

$a_n = -35 + 22n$

En los Ejercicios 23–28, escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. Luego haz una gráfica de los primeros seis términos de la secuencia. *(Consulta el Ejemplo 3).*

23. $a_{11} = 43, d = 5$ **24.** $a_{13} = 42, d = 4$

25. $a_{20} = -27, d = -2$ **26.** $a_{15} = -35, d = -3$

27. $a_{17} = -5, d = -\frac{1}{2}$ **28.** $a_{21} = -25, d = -\frac{3}{2}$

29. USAR ECUACIONES Un término de una secuencia aritmética es $a_8 = -13$. La diferencia común es -8. ¿Cuál es una regla para el enésimo término de la secuencia?

Ⓐ $a_n = 51 + 8n$ Ⓑ $a_n = 35 + 8n$

Ⓒ $a_n = 51 - 8n$ Ⓓ $a_n = 35 - 8n$

30. **HALLAR UN PATRÓN** Un término de una secuencia aritmética es $a_{12} = 43$. La diferencia común es 6. ¿Cuál es otro término de la secuencia?

Ⓐ $a_3 = -11$　　Ⓑ $a_4 = -53$

Ⓒ $a_5 = 13$　　Ⓓ $a_6 = -47$

En los Ejercicios 31–38, escribe una regla para el enésimo término de la secuencia aritmética. *(Consulta el Ejemplo 4).*

31. $a_5 = 41, a_{10} = 96$

32. $a_7 = 58, a_{11} = 94$

33. $a_6 = -8, a_{15} = -62$

34. $a_8 = -15, a_{17} = -78$

35. $a_{18} = -59, a_{21} = -71$

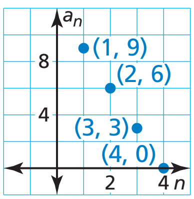
36. $a_{12} = -38, a_{19} = -73$

37. $a_8 = 12, a_{16} = 22$

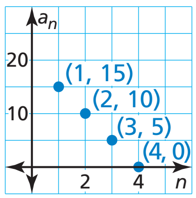
38. $a_{12} = 9, a_{27} = 15$

ESCRIBIR ECUACIONES **En los Ejercicios 39–44, escribe una regla para la secuencia de los términos dados.**

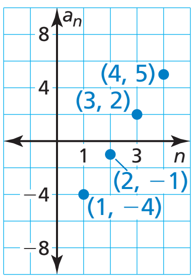
39.



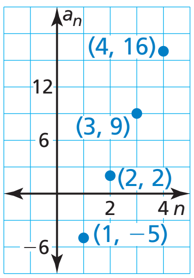
40.



41.



42.



43.

n	4	5	6	7	8
a_n	25	29	33	37	41

44.

n	4	5	6	7	8
a_n	31	39	47	55	63

45. **ESCRIBIR** Compara la gráfica de $a_n = 3n + 1$, donde n es un entero positivo, con la gráfica de $f(x) = 3x + 1$, donde x es un número real.

46. **SACAR CONCLUSIONES** Describe cómo duplicar cada término en una secuencia aritmética cambia la diferencia común de la secuencia. Justifica tu respuesta.

En los Ejercicios 47–52, halla la suma. *(Consulta el Ejemplo 5).*

47. $\sum_{i=1}^{20}(2i - 3)$

48. $\sum_{i=1}^{26}(4i + 7)$

49. $\sum_{i=1}^{33}(6 - 2i)$

50. $\sum_{i=1}^{31}(-3 - 4i)$

51. $\sum_{i=1}^{41}(-2.3 + 0.1i)$

52. $\sum_{i=1}^{39}(-4.1 + 0.4i)$

SENTIDO NUMÉRICO **En los Ejercicios 53 y 54, halla la suma de la secuencia aritmética.**

53. Los primeros 19 términos de la secuencia $9, 2, -5, -12, \ldots$

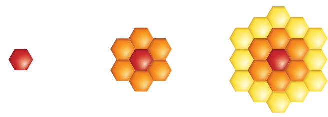
54. Los primeros 22 términos de la secuencia $17, 9, 1, -7, \ldots$

55. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Una banda escolar está dispuesta en filas. La primera fila tiene 3 miembros de la banda y cada fila después de la primera tiene 2 miembros más que la fila anterior. *(Consulta el Ejemplo 6).*

   a. Escribe una regla para el número de miembros de la banda en la enésima fila.

   b. ¿Cuántos miembros de la banda hay en una formación de siete filas?

56. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Las abejas domésticas hacen su panal comenzando con una sola celda hexagonal, luego forman anillo tras anillo de celdas hexagonales alrededor de la primera celda, tal como se muestra. El número de celdas en los anillos sucesivos forma una secuencia aritmética.

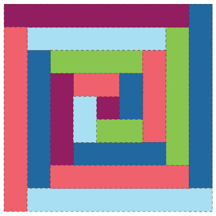


Célula inicial　　1 anillo　　2 anillos

   a. Escribe una regla para el número de celdas en el enésimo anillo.

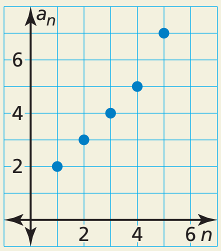
   b. ¿Cuántas celdas hay en el panal después de formarse el enésimo anillo?

57. CONEXIONES MATEMÁTICAS Un edredón está hecho de tiras de tela, comenzando con un pequeño cuadrado interno rodeado de rectángulos que forman cuadrados sucesivamente más grandes. El cuadrado interior y todos los rectángulos tienen una anchura de 1 pie. Escribe una expresión usando la notación de sumatoria que dé la suma de las áreas de todas las tiras de tela usadas para hacer el edredón que se muestra. Luego evalúa la expresión.

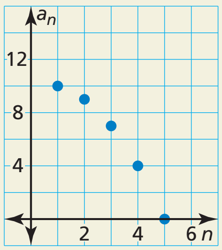


58. ¿CÓMO LO VES? ¿Qué gráfica(s) representa(n) una secuencia aritmética? Explica tu razonamiento.

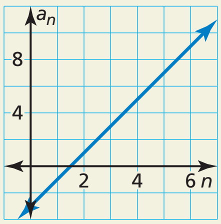
a.



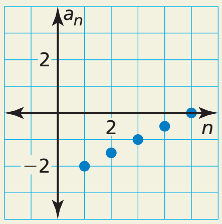
b.



c.



d.



59. ARGUMENTAR Tu amigo cree que la suma de una serie se duplica si la diferencia común de una serie se duplica y el primer término y el número de términos de la serie no cambia. ¿Es correcto lo que cree tu amigo? Explica tu razonamiento.

60. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO En la teoría de los números el *Teorema de los Números Primos de Dirichlet* expresa que si a y b son primos relativos, entonces la secuencia aritmética

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$$

contiene números primos infinitos. Halla los primeros 10 números primos en la secuencia si $a = 3$ y $b = 4$.

61. RAZONAR Halla la suma de los enteros impares positivos menores que 300. Explica tu razonamiento.

62. USAR ECUACIONES Halla el valor de n.

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i+5) = 544$ **b.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-4i-1) = -1127$

c. $\displaystyle\sum_{i=5}^{n}(7+12i) = 455$ **d.** $\displaystyle\sum_{i=3}^{n}(-3-4i) = -507$

63. RAZONAMIENTO ABSTRACTO Un teatro tiene n filas de asientos y cada fila tiene d asientos más que la fila frente a ella. Hay x asientos en la última (enésima) fila y un total de y asientos en todo el teatro. ¿Cuántos asientos hay en la primera fila del teatro? Escribe tu respuesta en términos de n, x, y y.

64. PENSAMIENTO CRÍTICO Las expresiones $3 - x$, x, y $1 - 3x$ son los tres primeros términos de una secuencia aritmética. Halla el valor de x y el siguiente término de la secuencia.

65. PENSAMIENTO CRÍTICO Una de las principales fuentes de nuestro conocimiento de matemáticas egipcias es el papiro de Ahmes, que es un pergamino copiado en 1650 A.C. por un escriba egipcio. El siguiente problema proviene del papiro de Ahmes.

Divide 10 hekats de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia común sea $\frac{1}{8}$ de hekat de cebada.

Usa lo que sabes sobre las secuencias y series aritméticas para determinar qué porción de un hekat debe recibir cada hombre.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Simplifica la expresión. *(Sección 5.2)*

66. $\dfrac{7}{7^{1/3}}$

67. $\dfrac{3^{-2}}{3^{-4}}$

68. $\left(\dfrac{9}{49}\right)^{1/2}$

69. $(5^{1/2} \cdot 5^{1/4})$

Indica si la función representa *crecimiento exponencial* o *decremento exponencial*. Luego haz una gráfica de la función. *(Sección 6.2)*

70. $y = 2e^{x}$ **71.** $y = e^{-3x}$ **72.** $y = 3e^{-x}$ **73.** $y = e^{0.25x}$

8.3 Analizar secuencias y series geométricas

Pregunta esencial

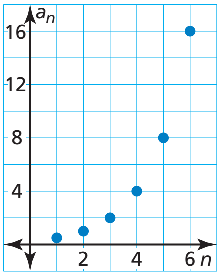
¿Cómo puedes reconocer una secuencia geométrica basándote en su gráfica?

En una **secuencia geométrica**, la razón entre cualquier término y el término anterior, denominada la *razón común*, es constante. Por ejemplo, en la secuencia geométrica 1, 2, 4, 8,…, la razón común es 2.

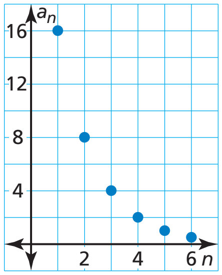
EXPLORACIÓN 1 Reconocer las gráficas de las secuencias geométricas

Trabaja con un compañero. Determina si cada gráfica muestra una secuencia geométrica. Si es así, entonces escribe una regla para el enésimo término de la secuencia y usa una hoja de cálculo para hallar la suma de los primeros 20 términos. ¿Qué observas acerca de la gráfica de una secuencia geométrica?

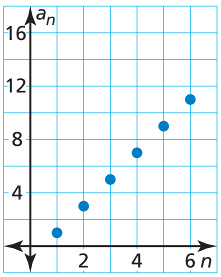
a.



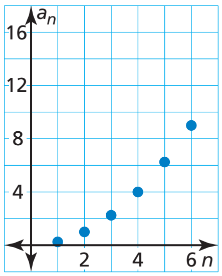
b.



c.



d.



BUSCAR REGULARIDAD EN EL RAZONAMIENTO REPETIDO

Para dominar las matemáticas, necesitas observar cuando los cálculos se repiten y buscar tanto los métodos generales como los métodos abreviados.

EXPLORACIÓN 2 Hallar la suma de una secuencia geométrica

Trabaja con un compañero. Puedes escribir el enésimo término de una secuencia geométrica cuyo primer término sea a_1 y cuya razón común sea r como

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

Entonces, puedes escribir la suma S_n de los primeros n términos de una secuencia geométrica como

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1}.$$

Reescribe esta fórmula hallando la diferencia $S_n - rS_n$ y resolviendo para S_n. Luego verifica tu fórmula reescrita hallando las sumas de los 20 primeros términos de las secuencias geométricas en la Exploración 1. Compara tus respuestas con las que obtuviste usando una hoja de cálculo.

Comunicar tu respuesta

3. ¿Cómo puedes reconocer una secuencia geométrica basándote en su gráfica?

4. Halla la suma de los términos de cada secuencia geométrica.

a. 1, 2, 4, 8, . . . , 8192 **b.** 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, . . . , 10^{-10}

8.3 Lección

Vocabulario Esencial

secuencia geométrica, *pág. 426*
razón común, *pág. 426*
serie geométrica, *pág. 428*

Anterior
función exponencial
propiedades de los exponentes

Qué aprenderás

- Identificar secuencias geométricas.
- Escribir reglas para secuencias geométricas.
- Hallar sumas de series geométricas finitas.

Identificar secuencias geométricas

En una **secuencia geométrica**, la razón entre cualquier término y el término anterior es constante. Esta razón constante se denomina **razón común** y se denota mediante r.

EJEMPLO 1 Identificar secuencias geométricas

Indica si cada secuencia es geométrica.

a. 6, 12, 20, 30, 42, . . .

b. 256, 64, 16, 4, 1, . . .

SOLUCIÓN

Halla las razones de los términos consecutivos.

a. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{6} = 2$ $\qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ $\qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{a_5}{a_4} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}$

▶ Las razones no son constantes, entonces la secuencia no es geométrica.

b. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{a_5}{a_4} = \frac{1}{4}$

▶ Cada razón es $\frac{1}{4}$, entonces la secuencia es geométrica.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Indica si la secuencia es geométrica. Explica tu razonamiento.

1. $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$ $\qquad$ **2.** 2, 6, 24, 120, 720, . . . $\qquad$ **3.** $-1, 2, -4, 8, -16, \ldots$

Escribir las reglas para las secuencias geométricas

Concepto Esencial

Regla para una secuencia geométrica

Álgebra El enésimo término de una secuencia geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón común r está dado por:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Ejemplo El enésimo término de una secuencia geométrica cuyo primer término es 2 y cuya razón común es 3 está dado por:

$$a_n = 2(3)^{n-1}$$

EJEMPLO 2 Escribir una regla para el enésimo término

Escribe una regla para el enésimo término de cada secuencia. Luego halla a_8.

a. 5, 15, 45, 135, . . . **b.** 88, −44, 22, −11, . . .

ERROR COMÚN

En la regla general para una secuencia geométrica, observa que el exponente es $n - 1$, y no n.

SOLUCIÓN

a. La secuencia es geométrica con un primer término $a_1 = 5$ y razón común $r = \frac{15}{5} = 3$. Entonces, una regla para el enésimo término es

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad \text{Escribe la regla general.}$$

$$= 5(3)^{n-1}. \qquad \text{Sustituye 5 por } a_1 \text{ y 3 por } r.$$

▶ Una regla es $a_n = 5(3)^{n-1}$, y el octavo término es $a_8 = 5(3)^{8-1} = 10{,}935$.

b. La secuencia es geométrica con un primer término $a_1 = 88$ y razón común $r = \frac{-44}{88} = -\frac{1}{2}$. Entonces, una regla para el enésimo término es

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad \text{Escribe la regla general.}$$

$$= 88\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad \text{Sustituye 88 por } a_1 \text{ y } -\frac{1}{2} \text{ por } r.$$

▶ Una regla es $a_n = 88\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, y el octavo término es $a_8 = 88\left(-\frac{1}{2}\right)^{8-1} = -\frac{11}{16}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

4. Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia 3, 15, 75, 375, . . . Luego halla a_9.

EJEMPLO 3 Escribir una regla dado un término y una razón común

Un término de una secuencia geométrica es $a_4 = 12$. La razón común es $r = 2$. Escribe una regla para el enésimo término. Luego haz una gráfica de los seis primeros términos de la secuencia.

SOLUCIÓN

Paso 1 Usa la regla general para hallar el primer término.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad \text{Escribe la regla general.}$$

$$a_4 = a_1 r^{4-1} \qquad \text{Sustituye 4 por } n.$$

$$12 = a_1(2)^3 \qquad \text{Sustituye 12 por } a_4 \text{ y 2 por } r.$$

$$1.5 = a_1 \qquad \text{Resuelve para hallar } a_1.$$

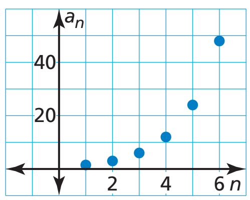
Paso 2 Escribe una regla para el enésimo término

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad \text{Escribe la regla general.}$$

$$= 1.5(2)^{n-1} \qquad \text{Sustituye 1.5 por } a_1 \text{ y 2 por } r.$$

Paso 3 Usa la regla para crear una tabla de valores para la secuencia. Luego marca los puntos.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1.5	3	6	12	24	48



ANALIZAR RELACIONES

Observa que los puntos pertenecen a una curva exponencial dado que los términos consecutivos cambian por factores iguales. Entonces, una secuencia geométrica en la que $r > 0$ y $r \neq 1$ es una función exponencial cuyo dominio es un subconjunto de los enteros.

EJEMPLO 4 **Escribir una regla dados dos términos**

Dos términos de una secuencia geométrica son $a_2 = 12$ y $a_5 = -768$. Escribe una regla para el enésimo término.

SOLUCIÓN

Paso 1 Escribe un sistema de ecuaciones usando $a_n = a_1 r^{n-1}$. Sustituye 2 por n para escribir la Ecuación 1. Sustituye 5 por n para escribir la Ecuación 2.

$$a_2 = a_1 r^{2-1} \quad \Rightarrow \quad 12 = a_1 r \qquad \text{Ecuación 1}$$

$$a_5 = a_1 r^{5-1} \quad \Rightarrow \quad -768 = a_1 r^4 \qquad \text{Ecuación 2}$$

Paso 2 Resuelve el sistema.

$$\frac{12}{r} = a_1 \qquad \text{Resuelve la Ecuación 1 para } a_1.$$

$$-768 = \frac{12}{r}(r^4) \qquad \text{Sustituye por } a_1 \text{ en la Ecuación 2.}$$

$$-768 = 12r^3 \qquad \text{Simplifica.}$$

$$-4 = r \qquad \text{Resuelve para hallar } r.$$

$$12 = a_1(-4) \qquad \text{Sustituye por } r \text{ en la Ecuación 1.}$$

$$-3 = a_1 \qquad \text{Resuelve para hallar } a_1.$$

Paso 3 Escribe una regla para a_n.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad \text{Escribe la regla general.}$$

$$= -3(-4)^{n-1} \qquad \text{Sustituye por } a_1 \text{ y } r.$$

Verifica

Usa la regla para verificar que el segundo término sea 12 y el quinto término sea -768.

$$a_2 = -3(-4)^{2-1}$$
$$= -3(-4) = 12 \checkmark$$
$$a_5 = -3(-4)^{5-1}$$
$$= -3(256) = -768 \checkmark$$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. Luego haz una gráfica de los seis primeros términos de la secuencia.

5. $a_6 = -96$, $r = -2$

6. $a_2 = 12$, $a_4 = 3$

Hallar sumas de series geométricas finitas

La expresión formada al sumar los términos de una secuencia geométrica se denomina **serie geométrica**. La suma de los n primeros términos de una serie geométrica se denota mediante S_n. Puedes desarrollar una regla para S_n de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} \\
-rS_n &= \quad\; - a_1 r - a_1 r^2 - a_1 r^3 - \cdots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n \\
\hline
S_n - rS_n &= a_1 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 - a_1 r^n \\
S_n(1 - r) &= a_1(1 - r^n)
\end{aligned}$$

Si $r \neq 1$, puedes dividir cada lado de la ecuación entre $1 - r$ para obtener la siguiente regla para S_n.

Concepto Esencial

La suma de una serie geométrica finita

La suma de los primeros n términos de una serie geométrica con una razón común de $r \neq 1$ es

$$S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right).$$

EJEMPLO 5 Hallar la suma de una serie geométrica

Halla la suma $\sum_{k=1}^{10} 4(3)^{k-1}$.

SOLUCIÓN

Paso 1 Halla el primer término y la razón común.

$a_1 = 4(3)^{1-1} = 4$ — Identifica el primer término.

$r = 3$ — Identifica la razón común.

Paso 2 Halla la suma

$S_{10} = a_1\left(\frac{1-r^{10}}{1-r}\right)$ — Escribe la regla para S_{10}.

$= 4\left(\frac{1-3^{10}}{1-3}\right)$ — Sustituye 4 por a_1 y 3 por r.

$= 118{,}096$ — Simplifica.

Verifica

Usa una calculadora gráfica para verificar la suma.

```
suma(secuencia(4*3^
(X-1),X,1,10))
                118096
```

EJEMPLO 6 Resolver un problema de la vida real

Puedes calcular el pago mensual M (en dólares) de un préstamo usando la fórmula

$$M = \frac{L}{\sum_{k=1}^{t}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k}$$

donde L es la cantidad del préstamo (en dólares), i es la tasa de interés mensual (en forma decimal), y t es el plazo (en meses). Calcula el pago mensual en un préstamo a cinco años para $20,000 con una tasa de interés anual de 6%.

SOLUCIÓN

Paso 1 Sustituye L, i, y t. La cantidad del préstamo es $L = 20{,}000$, la tasa de interés mensual es $i = \frac{0.06}{12} = 0.005$, y el plazo es $t = 5(12) = 60$.

$$M = \frac{20{,}000}{\sum_{k=1}^{60}\left(\frac{1}{1+0.005}\right)^k}$$

Paso 2 Observa que el denominador es una serie geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{1.005}$ y su razón común es $\frac{1}{1.005}$. Usa una calculadora para hallar el pago mensual.

```
1/1.005→R
          .9950248756
R((1-R^60)/(1-R)
)
           51.72556075
20000/Ans
          386.6560306
```

▶ Entonces, el pago mensual es $386.66.

USAR LA TECNOLOGÍA

Almacenar el valor de $\frac{1}{1.005}$ ayuda a minimizar los errores y también asegura una respuesta precisa. Redondear este valor a 0.995 da como resultado un pago mensual de $386.94.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Halla la suma.

7. $\sum_{k=1}^{8} 5^{k-1}$

8. $\sum_{i=1}^{12} 6(-2)^{i-1}$

9. $\sum_{t=1}^{7} -16(0.5)^{t-1}$

10. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 6, ¿Cómo cambia el pago mensual si la tasa de interés anual es de 5%?

8.3 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. COMPLETAR LA ORACIÓN La razón constante entre términos consecutivos de una secuencia geométrica se denomina __________.

2. ESCRIBIR ¿Cómo puedes determinar si una secuencia es geométrica basándote en su gráfica?

3. COMPLETAR LA ORACIÓN El enésimo término de una secuencia geométrica tiene la forma a_n = __________.

4. VOCABULARIO Expresa la regla de la suma de los primeros n términos de una serie geométrica.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 5–12, indica si la secuencia es geométrica. Explica tu razonamiento.
(Consulta el Ejemplo 1).

5. 96, 48, 24, 12, 6, . . .

6. 729, 243, 81, 27, 9, . . .

7. 2, 4, 6, 8, 10, . . .

8. 5, 20, 35, 50, 65, . . .

9. 0.2, 3.2, −12.8, 51.2, −204.8, . . .

10. 0.3, −1.5, 7.5, −37.5, 187.5, . . .

11. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}, \ldots$

12. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \ldots$

13. ESCRIBIR ECUACIONES Escribe una regla para la secuencia geométrica con la descripción dada.

a. El primer término es −3, y cada término es 5 veces el término anterior.

b. El primer término es 72 y cada término es $\frac{1}{3}$ veces el término anterior.

14. ESCRIBIR Compara los términos de una secuencia geométrica si $r > 1$ con si $0 < r < 1$.

En los Ejercicios 15–22, escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. Luego halla a_7.
(Consulta el Ejemplo 2).

15. 4, 20, 100, 500, . . .

16. 6, 24, 96, 384, . . .

17. 112, 56, 28, 14, . . .

18. 375, 75, 15, 3, . . .

19. $4, 6, 9, \frac{27}{2}, \ldots$

20. $2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \ldots$

21. 1.3, −3.9, 11.7, −35.1, . . .

22. 1.5, −7.5, 37.5, −187.5, . . .

En los Ejercicios 23–30, escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. Luego haz una gráfica de los seis primeros términos de la secuencia.

23. $a_3 = 4, r = 2$

24. $a_3 = 27, r = 3$

25. $a_2 = 30, r = \frac{1}{2}$

26. $a_2 = 64, r = \frac{1}{4}$

27. $a_4 = -192, r = 4$

28. $a_4 = -500, r = 5$

29. $a_5 = 3, r = -\frac{1}{3}$

30. $a_5 = 1, r = -\frac{1}{5}$

ANÁLISIS DE ERRORES En los Ejercicios 31 y 32, describe y corrige el error cometido al escribir una regla para el enésimo término de la secuencia geométrica donde $a_2 = 48$ y $r = 6$.

31.

$$a_n = a_1 r^n$$
$$48 = a_1 6^2$$
$$\frac{4}{3} = a_1$$
$$a_n = \frac{4}{3}(6)^n$$

32.

$$a_n = r(a_1)^{n-1}$$
$$48 = 6(a_1)^{2-1}$$
$$8 = a_1$$
$$a_n = 6(8)^{n-1}$$

En los Ejercicios 33−40, escribe una regla para el enésimo término de la secuencia geométrica.
(Consulta el Ejemplo 4).

33. $a_2 = 28, a_5 = 1792$

34. $a_1 = 11, a_4 = 88$

35. $a_1 = -6, a_5 = -486$

36. $a_2 = -10, a_6 = -6250$

37. $a_2 = 64, a_4 = 1$

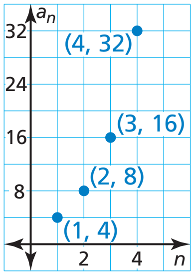
38. $a_1 = 1, a_2 = 49$

39. $a_2 = -72, a_6 = -\frac{1}{18}$

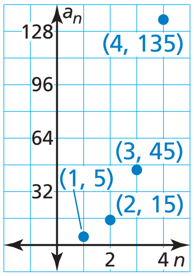
40. $a_2 = -48, a_5 = \frac{3}{4}$

ESCRIBIR ECUACIONES **En los Ejercicios 41–46, escribe una regla para la secuencia con los términos dados.**

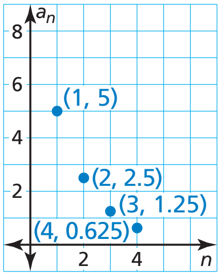
41.



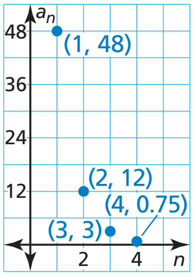
42.



43.



44.



45.

n	2	3	4	5	6
a_n	-12	24	-48	96	-192

46.

n	2	3	4	5	6
a_n	-21	63	-189	567	-1701

En los Ejercicios 47–52, halla la suma. *(Consulta el Ejemplo 5).*

47. $\displaystyle\sum_{i=1}^{9} 6(7)^{i-1}$

48. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} 7(4)^{i-1}$

49. $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} 4\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1}$

50. $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} 5\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$

51. $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} 8\left(-\frac{2}{3}\right)^{i}$

52. $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} 9\left(-\frac{3}{4}\right)^{i}$

SENTIDO NUMÉRICO **En los Ejercicios 53 y 54, halla la suma.**

53. Los primeros 8 términos de la secuencia geométrica $-12, -48, -192, -768, \ldots$

54. Los primeros 9 términos de la secuencia geométrica $-14, -42, -126, -378, \ldots$

55. ESCRIBIR Compara la gráfica de $a_n = 5(3)^{n-1}$, donde n es un entero positivo, con la gráfica de $f(x) = 5 \cdot 3^{x-1}$, donde x es un número real.

56. RAZONAMIENTO ABSTRACTO Usa la regla de la suma de una serie geométrica finita para escribir cada polinomio como expresión racional.

a. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

b. $3x + 6x^3 + 12x^5 + 24x^7$

REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS **En los Ejercicios 57 y 58, usa la fórmula del pago mensual dada en el Ejemplo 6.**

57. Estás comprando un carro nuevo. Sacas un préstamo a 5 años por \$15,000. La tasa de interés anual del préstamo es de 4%. Calcula el pago mensual. *(Consulta el Ejemplo 6).*

58. Estás comprando una casa nueva. Sacas una hipoteca a 30 años por \$200,000. La tasa de interés anual del préstamo es de 4.5%. Calcula el pago mensual.

59. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Un torneo regional de futbol tiene 64 equipos participantes. En la primera ronda del torneo, se juegan 32 partidos. En cada ronda sucesiva, el número de partidos disminuye por un factor de $\frac{1}{2}$.

a. Escribe la regla para el número de partidos jugados en la enésima ronda. ¿Para qué valores de n tiene sentido la regla? Explica.

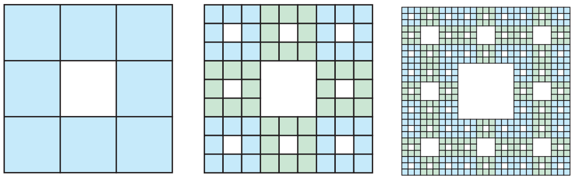
b. Halla el número total de partidos jugados en el torneo regional de fútbol.

60. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS En una formación de paracaidistas de R anillos, cada anillo después del primero tiene el doble de paracaidistas que el anillo precedente. Se muestra la formación para $R = 2$.

a. Imagina que a_n es el número de paracaidistas en el enésimo anillo. Escribe una regla para a_n.

b. Halla el número total de paracaidistas si hay 4 anillos.

61. RESOLVER DE PROBLEMAS La *alfombra de Sierpinski* es un fractal creado usando cuadrados. El proceso incluye retirar cuadrados más pequeños de cuadrados más grandes. Primero, divide un cuadrado grande en nueve cuadrados congruentes. Luego retira el cuadrado del centro. Repite estos pasos para cada cuadrado más pequeño, tal como se muestra abajo. Presupón que cada lado del cuadrado inicial es de 1 unidad de longitud.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

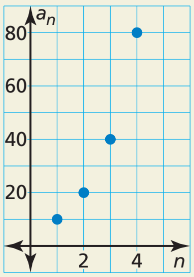
a. Imagina que a_n es el número total de cuadrados retirados en la enésima etapa. Escribe una regla para a_n. Luego halla el número total de cuadrados retirados hasta la Etapa 8.

b. Imagina que b_n es el área restante del cuadrado original después de la enésima etapa. Escribe una regla para b_n. Luego halla el área restante del cuadrado original después de la Etapa 12.

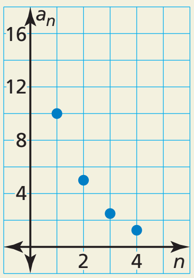
62. ¿CÓMO LO VES? Une cada secuencia con su gráfica. Explica tu razonamiento.

a. $a_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **b.** $a_n = 10(2)^{n-1}$

A.

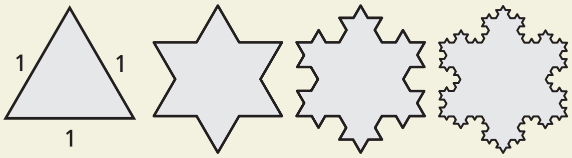


B.



63. PENSAMIENTO CRÍTICO El 1 de enero, depositas \$2000 en una cuenta de jubilación que paga 5% de interés anual. Durante los siguientes 30 años, haces un depósito cada 1 de enero. ¿Cuánto dinero tienes en tu cuenta inmediatamente después de hacer tu último depósito?

64. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Las primeras cuatro iteraciones del fractal denominado *copo de nieve de Koch* se muestran a continuación. Halla el perímetro y el área de cada iteración. ¿Los perímetros y las áreas forman secuencias geométricas? Explica tu razonamiento.



65. ARGUMENTAR Tú y tu amigo comparan dos opciones de préstamo para una casa de \$165,000. El préstamo 1 es un préstamo a 15 años con una tasa de interés anual de 3%. El préstamo 2 es un préstamo a 30 años con una tasa de interés anual de 4%. Tu amigo dice que la cantidad total repagada sobre el préstamo será menor para el préstamo 2. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Justifica tu respuesta.

66. PENSAMIENTO CRÍTICO Imagina que L es la cantidad de un préstamo (en dólares), que i es la tasa de interés mensual (en forma decimal), que t es el plazo (en meses) y M es el pago mensual (en dólares).

a. Al hacer pagos mensuales, estás pagando la cantidad del préstamo más el interés que acumula el préstamo cada mes. Para un préstamo de un mes, $t = 1$, la ecuación para el repago es $L(1 + i) - M = 0$. Para un préstamo a 2 meses, $t = 2$, la ecuación es $[L(1 + i) - M](1 + i) - M = 0$. Resuelve ambas ecuaciones de repago para L.

b. Usa el patrón en las ecuaciones que resolviste en la parte (a) para escribir una ecuación de repago para un préstamo a t meses. (*Consejo*: L es igual a M veces una serie geométrica). Luego resuelve la ecuación para M.

c. Usa la regla para la suma de una serie geométrica finita para demostrar que la fórmula en la parte (b) es equivalente a

$$M = L\left(\frac{i}{1 - (1 + i)^{-t}}\right).$$

Usa esta fórmula para verificar tus respuestas en los Ejercicios 57 y 58.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Haz una gráfica de la función. Expresa el dominio y el rango. *(Sección 7.2)*

67. $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

68. $g(x) = \dfrac{2}{x} + 3$

69. $h(x) = \dfrac{1}{x - 2} + 1$

70. $p(x) = \dfrac{3}{x + 1} - 2$

8.1–8.3 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

secuencia, *pág. 410*
términos de una secuencia, *pág. 410*
serie, *pág. 412*
notación de sumatoria, *pág. 412*
notación sigma, *pág. 412*
secuencia aritmética, *pág. 418*
diferencia común, *pág. 418*
serie aritmética, *pág. 420*
secuencia geométrica, *pág. 426*
razón común, *pág. 426*
serie geométrica, *pág. 428*

Conceptos Esenciales

Sección 8.1

Secuencias, *pág. 410*
Series y notación de sumatoria, *pág. 412*
Fórmulas para series especiales, *pág. 413*

Sección 8.2

Regla para una secuencia aritmética, *pág. 418*
La suma de una serie aritmética finita, *pág. 420*

Sección 8.3

Regla para una secuencia geométrica, *pág. 426*
La suma de una serie geométrica finita, *pág. 428*

Prácticas matemáticas

1. Explica cómo puede ser útil ver cada agrupación como tablas individuales en el Ejercicio 29 de la página 415.

2. ¿Cómo puedes usar herramientas para hallar la suma de las series aritméticas en los Ejercicios 53 y 54 de la página 423?

3. ¿Cómo te ayudo el entender el dominio de cada función a comparar las gráficas en el Ejercicio 55 de la página 431?

Destrezas de estudio

Mantener tu mente enfocada

- Antes de hacer la tarea, revisa las casillas de conceptos y ejemplos. Revisa los ejemplos leyéndolos en voz alta.
- Completa la tarea como si estuvieras preparándote también para un examen. Memoriza los diferentes tipos de problemas, las fórmulas, reglas, etc.

8.1–8.3 Prueba

Describe el patrón, escribe el siguiente término y escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. *(Sección 8.1)*

1. 1, 7, 13, 19, . . .

2. $-5, 10, -15, 20, \ldots$

3. $\frac{1}{20}, \frac{2}{30}, \frac{3}{40}, \frac{4}{50}, \ldots$

Escribe la serie usando la notación de sumatoria. Luego halla la suma de la serie. *(Sección 8.1)*

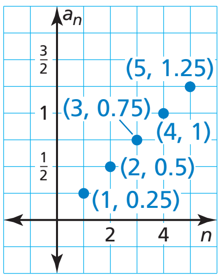
4. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 15$

5. $0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{7}{8}$

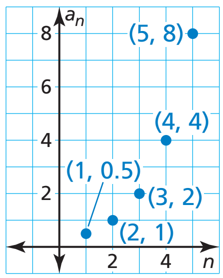
6. $9 + 16 + 25 + \cdots + 100$

Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. *(Secciones 8.2 y 8.3)*

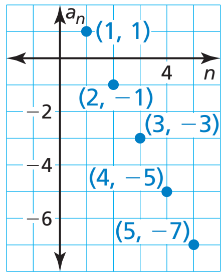
7.



8.



9.



Indica si la secuencia es *aritmética*, *geométrica* o *ninguna de las dos*. Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia. Luego halla a_9. *(Secciones 8.2 y 8.3)*

10. $13, 6, -1, -8, \ldots$

11. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

12. $1, -3, 9, -27, \ldots$

13. Un término de una secuencia aritmética es $a_{12} = 19$. La diferencia común es $d = 7$. Escribe una regla para el enésimo término. Luego haz una gráfica de los seis primeros términos de la secuencia. *(Sección 8.2)*

14. Dos términos de una secuencia geométrica son $a_6 = -50$ y $a_9 = -6250$. Escribe una regla para el enésimo término. *(Sección 8.3)*

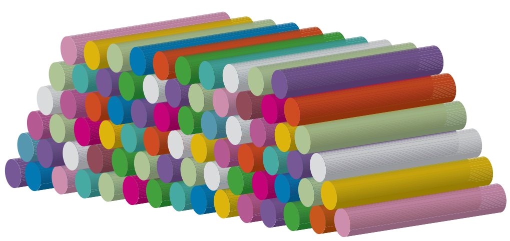
Halla la suma. *(Secciones 8.2 y 8.3)*

15. $\sum_{n=1}^{9} (3n + 5)$

16. $\sum_{k=1}^{5} 11(-3)^{k-2}$

17. $\sum_{i=1}^{12} -4\left(\frac{1}{2}\right)^{i+3}$

18. Hay tizas apiladas en una pila. Se muestra parte de la pila. La fila inferior tiene 15 tizas y la fila superior tiene 6 tizas. Cada fila tiene una tiza menos que la fila anterior. ¿Cuántas tizas hay en la pila? *(Sección 8.2)*



19. Aceptas un empleo como ingeniero ambiental que paga un salario de $45,000 en el primer año. Después del primer año, tu salario aumenta 3.5% por año. *(Sección 8.3)*

a. Escribe una regla que dé tu salario a_n en tu enésimo año de empleo.

b. ¿Cuál será tu salario durante tu quinto año de empleo?

c. Trabajas 10 años para la compañía. ¿Cuál es tu ganancia total? Justifica tu respuesta.

8.4 Hallar sumas de series geométricas infinitas

Pregunta esencial ¿Cómo puedes hallar la suma de una serie geométrica infinita?

EXPLORACIÓN 1 **Hallar sumas de series geométricas infinitas**

USAR HERRAMIENTAS ESTRATÉGICAMENTE

Para dominar las matemáticas, necesitas usar herramientas tecnológicas tales, como la hoja de cálculo, para explorar y profundizar tu comprensión de los conceptos.

Trabaja con un compañero. Ingresa cada serie geométrica en una hoja de cálculo. Luego usa la hoja de cálculo para determinar si la serie geométrica infinita tiene una suma finita. Si es así, halla la suma. Explica tu razonamiento. (La figura muestra una hoja de cálculo parcialmente completada para la parte (a)).

a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

b. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$

c. $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \frac{81}{16} + \cdots$

d. $1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{16} + \frac{125}{64} + \frac{625}{256} + \cdots$

e. $1 + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{64}{125} + \frac{256}{625} + \cdots$

f. $1 + \frac{9}{10} + \frac{81}{100} + \frac{729}{1000} + \frac{6561}{10{,}000} + \cdots$

	A	B
1	1	1
2	2	0.5
3	3	0.25
4	4	0.125
5	5	0.0625
6	6	0.03125
7	7	
8	8	
9	9	
10	10	
11	11	
12	12	
13	13	
14	14	
15	15	
16	**Suma**	

EXPLORACIÓN 2 **Escribir una conjetura**

Trabaja con un compañero. Verifica la serie geométrica infinita en la Exploración 1. Escribe una conjetura sobre cómo puedes determinar si la serie geométrica infinita

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots$$

tiene una suma finita.

EXPLORACIÓN 3 **Escribir una fórmula**

Trabaja con un compañero. En la Lección 8.3, aprendiste que la suma de los primeros n términos de una serie geométrica cuyo primer término es a_n y cuya razón común $r \neq 1$ es

$$S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right).$$

Si una serie geométrica infinita tiene una suma finita, ¿qué sucede con r^n a medida que n aumenta? Explica tu razonamiento. Escribe una fórmula para hallar la suma de una serie geométrica infinita. Luego, para verificar tu fórmula, revisa las sumas que obtuviste en la Exploración 1.

Comunicar tu respuesta

4. ¿Cómo puedes hallar la suma de una serie geométrica infinita?

5. Halla la suma de cada serie geométrica infinita, si existe.

a. $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$ **b.** $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \frac{32}{81} + \cdots$

8.4 Lección

Qué aprenderás

- Hallar sumas parciales de series geométricas infinitas.
- Hallar sumas de series geométricas infinitas.

Vocabulario Esencial

suma parcial, *pág. 436*

Anterior

decimal periódico

fracción en su mínima expresión

número racional

Sumas parciales de series geométricas infinitas

La suma S_n de los primeros n términos de una serie infinita se denomina **suma parcial**. La suma parcial de una serie geométrica infinita puede acercar sea un valor limitante.

EJEMPLO 1 Hallar sumas parciales

Considera la serie geométrica infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots.$$

Halla y haz la gráfica de las sumas parciales S_n para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Luego describe qué pasa con S_n a medida que n aumenta.

SOLUCIÓN

Paso 1 Halla las sumas parciales.

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

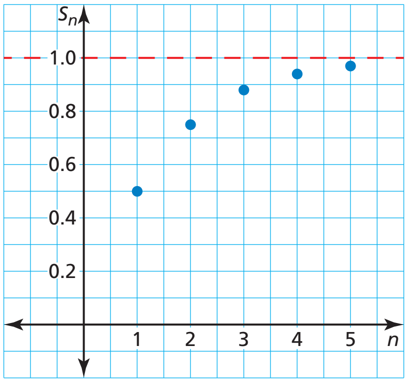
$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \approx 0.88$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \approx 0.94$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 0.97$$

Paso 2 Marca los puntos (1, 0.5), (2, 0.75), (3, 0.88), (4, 0.94), y (5, 0.97). La gráfica se muestra a la derecha.



- Basándose en la gráfica, S_n parece acercarse a 1 a medida que n aumenta.

Sumas de series geométricas infinitas

En el Ejemplo 1, puedes entender por qué S_n se acerca a 1 a medida que n aumenta considerando la regla de la suma de una serie geométrica finita.

$$S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Al aumentar n, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se acerca a 0, entonces S_n se acerca a 1. Por lo tanto, 1 se define como la suma de la serie geométrica infinita en el Ejemplo 1. En forma más general, al aumentar n en *cualquier* serie geométrica infinita con razón común r de entre -1 y 1, el valor de S_n se acerca a

$$S_n = a_1\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) \approx a_1\left(\frac{1 - 0}{1 - r}\right) = \frac{a_1}{1 - r}.$$

Concepto Esencial

La suma de una serie geométrica infinita

La suma de una serie geométrica infinita cuyo primer término es a_1 y cuya razón común r está dada por

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

siempre que $|r| < 1$. Si $|r| \geq 1$, entonces la serie no tiene suma.

COMPRENDER LOS TÉRMINOS MATEMÁTICOS

Aunque una serie geométrica con una razón común de $|r| < 1$ tiene *infinitos* términos, la serie tiene una suma *finita*.

EJEMPLO 2 Hallar sumas de series geométricas infinitas

Halla la suma de cada serie geométrica infinita.

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 3(0.7)^{i-1}$ **b.** $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots$ **c.** $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \cdots$

SOLUCIÓN

a. Para esta serie $a_1 = 3(0.7)^{1-1} = 3$, y $r = 0.7$. La suma de la serie es

$S = \dfrac{a_1}{1 - r}$ Fórmula para la suma de una serie geométrica infinita

$= \dfrac{3}{1 - 0.7}$ Sustituye 3 por a_1 y 0.7 por r.

$= 10.$ Simplifica.

b. Para esta serie, $a_1 = 1$ y $a_2 = 3$. Entonces, la razón común es $r = \frac{3}{1} = 3$.

Dado que $|3| \geq 1$, la suma no existe.

c. Para esta serie, $a_1 = 1$ y $a_2 = -\frac{3}{4}$. Entonces, la razón común es

$$r = \frac{-\frac{3}{4}}{1} = -\frac{3}{4}.$$

La suma de la serie es

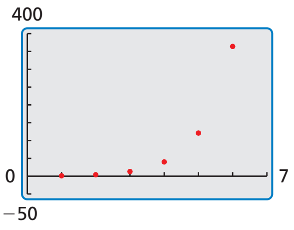
$S = \dfrac{a_1}{1 - r}$ Fórmula para la suma de una serie geométrica infinita

$= \dfrac{1}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}$ Sustituye 1 por a_1 y $-\frac{3}{4}$ por r.

$= \dfrac{4}{7}.$ Simplifica.

CONSEJO DE ESTUDIO

Para la serie geométrica en la parte (b), se muestra la gráfica de las sumas parciales S_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. Basándose en la gráfica, parece que al aumentar n, las sumas parciales no se acercan a un número fijo.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

1. Considera la serie geométrica infinita

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \frac{16}{1625} + \frac{32}{3125} + \cdots.$$

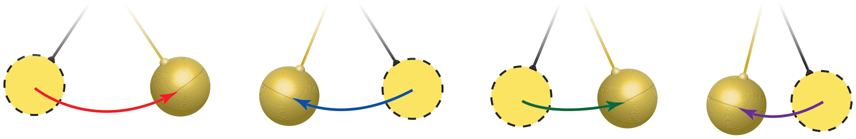
Halla y haz la gráfica de las sumas parciales S_n para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Luego describe qué pasa con S_n al aumentar n.

Halla la suma de la serie geométrica infinita, si existe.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$ **4.** $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \cdots$

EJEMPLO 3 Resolver un problema de la vida real

Un péndulo que se libera para que oscile libremente recorre 18 pulgadas en la primera oscilación. En cada oscilación sucesiva, el péndulo recorre el 80% de la distancia recorrida en la oscilación anterior. ¿Cuál es la distancia total que oscila el péndulo?



SOLUCIÓN

La distancia total recorrida por el péndulo está dada por la serie geométrica infinita

$$18 + 18(0.8) + 18(0.8)^2 + 18(0.8)^3 + \cdots.$$

Para esta serie, $a_1 = 18$ y $r = 0.8$. La suma de esta serie es

$S = \dfrac{a_1}{1 - r}$ Fórmula para la suma de una serie geométrica infinita

$= \dfrac{18}{1 - 0.8}$ Sustituye 18 por a_1 y 0.8 por r.

$= 90.$ Simplifica.

▶ El péndulo recorre una distancia total de 90 pulgadas, o 7.5 pies.

RECUERDA

Dado que un decimal periódico es un número racional, se puede escribir como $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y $b \neq 0$.

EJEMPLO 4 Escribir un decimal periódico como fracción

Escribe 0.242424 . . . como fracción en su mínima expresión.

SOLUCIÓN

Escribe el decimal periódico como una serie geométrica infinita.

$$0.242424\ldots = 0.24 + 0.0024 + 0.000024 + 0.00000024 + \cdots$$

Para esta serie, $a_1 = 0.24$ y $r = \dfrac{0.0024}{0.24} = 0.01$. Luego escribe la suma de la serie.

$S = \dfrac{a_1}{1 - r}$ Fórmula para la suma para una serie geométrica infinita

$= \dfrac{0.24}{1 - 0.01}$ Sustituye 0.24 por a_1 y 0.01 por r.

$= \dfrac{0.24}{0.99}$ Simplifica.

$= \dfrac{24}{99}$ Escribe como un cociente de enteros.

$= \dfrac{8}{33}$ Simplifica.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

5. **¿QUÉ PASA SI?** En el Ejemplo 3, supón que el péndulo recorre 10 pulgadas en su primera oscilación. ¿Cuál es la distancia total que oscila el péndulo?

Escribe el decimal periódico como fracción en su mínima expresión.

6. 0.555 . . . **7.** 0.727272 . . . **8.** 0.131313 . . .

8.4 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** La suma S_n de los primeros n términos de una serie infinita se denomina ________.

2. **ESCRIBIR** Explica cómo saber si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 r^{i-1}$ tiene una suma.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–6, considera la serie geométrica infinita. Halla las sumas parciales S_n para $n = 1, 2, 3, 4,$ y 5 y haz la gráfica de las mismas. Luego describe qué pasa con S_n al aumentar n. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{162} + \cdots$

4. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \cdots$

5. $4 + \frac{12}{5} + \frac{36}{25} + \frac{108}{125} + \frac{324}{625} + \cdots$

6. $2 + \frac{2}{6} + \frac{2}{36} + \frac{2}{216} + \frac{2}{1296} + \cdots$

En los Ejercicios 7–14, halla la suma de la serie geométrica infinita, si existe. *(Consulta el Ejemplo 2).*

7. $\sum_{n=1}^{\infty} 8\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} -6\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{11}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$

10. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{i-1}$

11. $2 + \frac{6}{4} + \frac{18}{16} + \frac{54}{64} + \cdots$

12. $-5 - 2 - \frac{4}{5} - \frac{8}{25} - \cdots$

13. $3 + \frac{5}{2} + \frac{25}{12} + \frac{125}{72} + \cdots$

14. $\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{50}{9} - \frac{500}{27} + \cdots$

ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 15 y 16, describe y corrige el error cometido al hallar la suma de la serie geométrica infinita.**

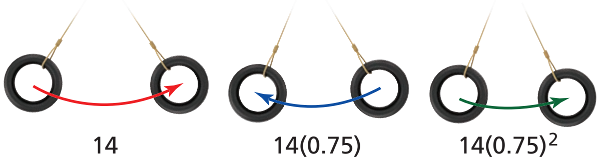
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}$

> ✗ Para esta serie, $a_1 = 1$ y $r = \frac{7}{2}$.
>
> $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{7}{2}} = \frac{1}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$

16. $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$

> ✗ Para esta serie, $a_1 = 4$ y $r = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2}$.
>
> Dado que $\left|\frac{3}{2}\right| > 1$, la serie no tiene suma.

17. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Empujas una vez a tu primo menor, que está sentado en un columpio de neumático, y luego dejas que tu primo se columpie libremente. En la primera columpiada, tu primo recorre una distancia de 14 pies. En cada columpiada sucesiva, tu primo recorre el 75% de la distancia de la columpiada anterior. ¿Cuál es la distancia total que se columpia tu primo? *(Consulta el Ejemplo 3).*



18. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Una compañía tuvo una ganancia de \$350,000 en su primer año. Desde entonces, la ganancia de la compañía ha disminuido en un 12% al año. Presuponiendo que la tendencia continúa, ¿cuál es la ganancia total que puede generar la compañía en el transcurso de su vida útil? Justifica tu respuesta.

En los Ejercicios 19–24, escribe el decimal periódico como fracción en su mínima expresión. *(Consulta el Ejemplo 4).*

19. 0.222 . . .

20. 0.444 . . .

21. 0.161616 . . .

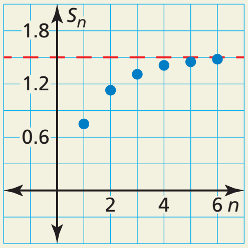
22. 0.625625625 . . .

23. 32.323232 . . .

24. 130.130130130 . . .

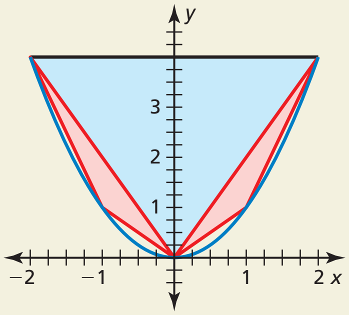
25. **RESOLVER PROBLEMAS** Halla dos series geométricas infinitas cada una de cuyas sumas sea 6. Justifica tus respuestas.

26. **¿CÓMO LO VES?** La gráfica muestra las sumas parciales de la serie geométrica $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$. ¿Cuál es el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Explica.



27. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Una estación de radio tiene un concurso diario en el que a un oyente al azar se le hace una pregunta de datos curiosos. El primer día, la estación le da $500 dólares al primer oyente que responde correctamente. En cada día sucesivo, el ganador recibe el 90% de la ganancia del día anterior. ¿Cuál es la cantidad total de dinero en premios que la estación de radio entrega durante el concurso?

28. **ESTIMULAR EL PENSAMIENTO** Arquímedes usó la suma de una serie geométrica para calcular el área que abarca una parábola y una línea recta. En “la Cuadratura de la Parábola”, él comprobó que el área de la región es $\frac{4}{3}$ el área del triángulo inscrito. El primer término de la serie para la parábola siguiente está representado por el área del triángulo azul y el segundo término está representado por el área de los triángulos rojos. Usa el resultado de Arquímedes para hallar el área de la región. Luego escribe el área como suma de una serie geométrica infinita.



29. **SACAR CONCLUSIONES** ¿Una persona que corre a 20 pies por segundo puede alcanzar alguna vez a una tortuga que corre a 10 pies por segundo si la tortuga tiene una ventaja de 20 pies? El matemático griego Zenón dijo que no. Él razonó de la siguiente manera:

Viendo la carrera como la vio Zenón, las distancias y los tiempos que demora la persona en correr esas distancias forman series geométricas infinitas. Usando la tabla, demuestra que ambas series tienen sumas finitas. ¿La persona alcanza a la tortuga? Justifica tu respuesta.

Distancia (pies)	20	10	5	2.5	. . .
Tiempo (segundos)	1	0.5	0.25	0.125	. . .

30. **ARGUMENTAR** Tu amigo dice que 0.999 . . . es igual a 1. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Justifica tu respuesta.

31. **PENSAMIENTO CRÍTICO** El *triángulo de Sierpinski* es un fractal creado usando triángulos equiláteros. El proceso incluye retirar triángulos más pequeños de triángulos más grandes uniendo los puntos medios de los lados de los triángulos más grandes tal como se muestra. Presupón que el triángulo inicial tiene un área de 1 pie cuadrado.

a. Imagina que a_n es el área total de todos los triángulos retirados en la Etapa n. Escribe una regla para a_n.

b. Halla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Interpreta tu respuesta en el contexto de esta situación.

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Determina el tipo de función que se representa en la tabla. *(Sección 6.7)*

32.

x	−3	−2	−1	0	1
y	0.5	1.5	4.5	13.5	40.5

33.

x	0	4	8	12	16
y	−7	−1	2	2	−1

Determina si la secuencia es *aritmética, geométrica* o *ninguna de las dos*. *(Secciones 8.2 y 8.3)*

34. −7, −1, 5, 11, 17, . . .

35. 0, −1, −3, −7, −15, . . .

36. 13.5, 40.5, 121.5, 364.5, . . .

8.5 Usar reglas recurrentes con las secuencias

Pregunta esencial

¿Cómo puedes definir una secuencia en forma recurrente?

Una **regla recurrente** da el (los) término(s) iniciales de una secuencia y una *ecuación recurrente* que indica cómo se relaciona a_n con uno o más de los términos precedentes.

EXPLORACIÓN 1 Evaluar una regla recurrente

Trabaja con un compañero. Usa cada regla recurrente y una hoja de cálculo para escribir los primeros seis términos de la secuencia. Clasifica la secuencia como aritmética, geométrica o ninguna de las dos. Explica tu razonamiento. (La figura muestra una hoja de cálculo parcialmente completa para la parte (a).)

a. $a_1 = 7,\ a_n = a_{n-1} + 3$

b. $a_1 = 5,\ a_n = a_{n-1} - 2$

c. $a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1}$

d. $a_1 = 1,\ a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1})^2$

e. $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 1$

f. $a_1 = 4,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 1$

g. $a_1 = 4,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$

h. $a_1 = 4,\ a_2 = 5,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

	A	B
1	n	Enésimo termino
2	1	7
3	2	10
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	

B2+3

PRESTAR ATENCIÓN A LA PRECISIÓN

Para dominar las matemáticas, necesitas comunicarte en forma precisa con otras personas.

EXPLORACIÓN 2 Escribir una regla recurrente

Trabaja con un compañero. Escribe una regla recurrente para la secuencia. Explica tu razonamiento.

a. 3, 6, 9, 12, 15, 18, . . .

b. 18, 14, 10, 6, 2, −2, . . .

c. 3, 6, 12, 24, 48, 96, . . .

d. 128, 64, 32, 16, 8, 4, . . .

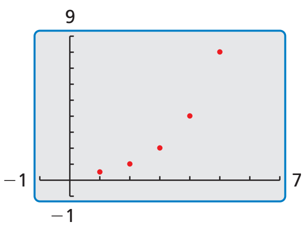
e. 5, 5, 5, 5, 5, 5, . . .

f. 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . .

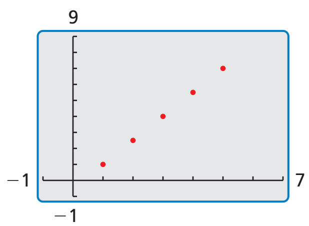
EXPLORACIÓN 3 Escribir una regla recurrente

Trabaja con un compañero. Escribe una regla recurrente para la secuencia cuya gráfica se muestra.

a.



b.



Comunicar tu respuesta

4. ¿Cómo puedes definir una secuencia en forma recurrente?

5. Escribe una regla recurrente que sea diferente de las de las Exploraciones 1–3. Escribe los seis primeros términos de la secuencia. Luego haz la gráfica de la secuencia y clasifícala como aritmética, geométrica o ninguna de las dos.

8.5 Lección

Vocabulario Esencial

regla explícita, *pág. 442*
regla recursiva, *pág. 442*

Qué aprenderás

- Evaluar reglas recurrentes para las secuencias.
- Escribir reglas recurrentes para las secuencias.
- Diferenciar entre reglas recurrentes y explícitas de las secuencias.
- Usar reglas recurrentes para resolver problemas de la vida real.

Evaluar reglas recurrentes

En lo que va de este capítulo, has trabajado con reglas explícitas para el enésimo término de una secuencia, tales como $a_n = 3n - 2$ y $a_n = 7(0.5)^n$. Una **regla explícita** da a_n como función del número n de la posición del término en la secuencia.

En esta sección, aprenderás otra manera de definir una secuencia –mediante una *regla recurrente*. Una **regla recurrente** da el (los) término(s) inicial(es) de una secuencia y una *ecuación recurrente* que indica cómo se relaciona a_n con uno o más de los términos precedentes.

EJEMPLO 1 Evaluar reglas recurrentes

Escribe los seis primeros términos de cada secuencia.

a. $a_0 = 1, a_n = a_{n-1} + 4$ **b.** $f(1) = 1, f(n) = 3 \cdot f(n - 1)$

SOLUCIÓN

a. $a_0 = 1$ 1^er^ término

$a_1 = a_0 + 4 = 1 + 4 = 5$ 2^do^ término

$a_2 = a_1 + 4 = 5 + 4 = 9$ 3^er^ término

$a_3 = a_2 + 4 = 9 + 4 = 13$ 4^to^ término

$a_4 = a_3 + 4 = 13 + 4 = 17$ 5^to^ término

$a_5 = a_4 + 4 = 17 + 4 = 21$ 6^to^ término

b. $f(1) = 1$

$f(2) = 3 \cdot f(1) = 3(1) = 3$

$f(3) = 3 \cdot f(2) = 3(3) = 9$

$f(4) = 3 \cdot f(3) = 3(9) = 27$

$f(5) = 3 \cdot f(4) = 3(27) = 81$

$f(6) = 3 \cdot f(5) = 3(81) = 243$

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe los seis primeros términos de la secuencia.

1. $a_1 = 3, a_n = a_{n-1} - 7$

2. $a_0 = 162, a_n = 0.5a_{n-1}$

3. $f(0) = 1, f(n) = f(n - 1) + n$

4. $a_1 = 4, a_n = 2a_{n-1} - 1$

Escribir reglas recurrentes

En la parte (a) del Ejemplo 1, las *diferencias* de los términos consecutivos de la secuencia son constantes, entonces la secuencia es aritmética. En la parte (b), las *razones* de los términos consecutivos son constantes, entonces la secuencia es geométrica. En general, las reglas de las secuencias aritméticas y geométricas se pueden escribir en forma recurrente de la siguiente manera.

Concepto Esencial

Ecuaciones recurrentes para secuencias aritméticas y geométricas

Secuencia aritmética

$a_n = a_{n-1} + d,$ donde d es la diferencia común

Secuencia geométrica

$a_n = r \cdot a_{n-1},$ donde r es la razón común

EJEMPLO 2 Escribir reglas recurrentes

Escribe una regla recurrente para (a) 3, 13, 23, 33, 43, . . . y (b) 16, 40, 100, 250, 625, ...

SOLUCIÓN

Usa una tabla para organizar los términos y hallar el patrón.

a.

n	1	2	3	4	5
a_n	3	13	23	33	43

+ 10 + 10 + 10 + 10

La secuencia es aritmética, el primer término es $a_1 = 3$ y la diferencia común es $d = 10$.

$a_n = a_{n-1} + d$ Ecuación recurrente para una secuencia aritmética

$= a_{n-1} + 10$ Sustituye 10 por d.

▶ Una regla recurrente para la secuencia es $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 10$.

b.

n	1	2	3	4	5
a_n	16	40	100	250	625

$\times \frac{5}{2}$ $\times \frac{5}{2}$ $\times \frac{5}{2}$ $\times \frac{5}{2}$

La secuencia es geométrica, el primer término es $a_1 = 16$ y la razón común es $r = \frac{5}{2}$.

$a_n = r \cdot a_{n-1}$ Ecuación recurrente para una secuencia geométrica

$= \frac{5}{2} a_{n-1}$ Sustituye $\frac{5}{2}$ por r.

▶ Una regla recurrente para la secuencia es $a_1 = 16$, $a_n = \frac{5}{2} a_{n-1}$.

ERROR COMÚN

Una *ecuación* recurrente de una secuencia no incluye el término inicial. Para hallar una *regla* recurrente para una secuencia, se debe(n) incluir el (los) término(s) inicial(es).

CONSEJO DE ESTUDIO

La secuencia en la parte (a) del Ejemplo 3 se denomina *secuencia Fibonacci*. La secuencia en la parte (b) enumera *números factoriales*. Aprenderás más sobre factoriales en el Capítulo 10.

EJEMPLO 3 Escribir reglas recurrentes

Escribe una regla recurrente para cada secuencia.

a. 1, 1, 2, 3, 5, . . . **b.** 1, 1, 2, 6, 24, . . .

SOLUCIÓN

a. Los términos no tienen ni diferencia común ni razón común. Empezando con el tercer término en la secuencia, cada término es la suma de los dos términos anteriores.

▶ Una regla recurrente para la secuencia es $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

b. Los términos no tienen ni diferencia común ni razón común. Denota el primer término mediante $a_0 = 1$. Observa que $a_1 = 1 = 1 \cdot a_0$, $a_2 = 2 = 2 \cdot a_1$, $a_3 = 6 = 3 \cdot a_2$, y así sucesivamente.

▶ Una regla recurrente para la secuencia es $a_0 = 1$, $a_n = n \cdot a_{n-1}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe una regla recurrente para la secuencia.

5. 2, 14, 98, 686, 4802, . . .

6. 19, 13, 7, 1, −5, . . .

7. 11, 22, 33, 44, 55, . . .

8. 1, 2, 2, 4, 8, 32, . . .

Diferenciar entre las reglas recurrentes y explícitas

EJEMPLO 4 Diferenciar de reglas explícitas a reglas recurrentes

Escribe una regla recurrente para (a) $a_n = -6 + 8n$ y (b) $a_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

SOLUCIÓN

a. La regla explícita representa una secuencia aritmética cuyo primer término es $a_1 = -6 + 8(1) = 2$ y cuya diferencia común es $d = 8$.

$a_n = a_{n-1} + d$ Ecuación recurrente para una secuencia aritmética

$a_n = a_{n-1} + 8$ Sustituye 8 por d.

▶ Una regla recurrente para la secuencia es $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 8$.

b. La regla explícita representa una secuencia geométrica cuyo primer término es $a_1 = -3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = -3$ y cuya razón común es $r = \frac{1}{2}$.

$a_n = r \cdot a_{n-1}$ Ecuación recurrente para una secuencia geométrica

$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ Sustituye $\frac{1}{2}$ por r.

▶ Una regla recurrente para la secuencia es $a_1 = -3$, $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$.

EJEMPLO 5 Diferenciar de reglas recurrentes a reglas explícitas

Escribe una regla explícita para cada secuencia.

a. $a_1 = -5$, $a_n = a_{n-1} - 2$ **b.** $a_1 = 10$, $a_n = 2a_{n-1}$

SOLUCIÓN

a. La regla recurrente representa una secuencia aritmética cuyo primer término es $a_1 = -5$ y cuya diferencia común es $d = -2$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ Regla explícita para una secuencia aritmética

$a_n = -5 + (n - 1)(-2)$ Sustituye -5 por a_1 y -2 por d.

$a_n = -3 - 2n$ Simplifica.

▶ Una regla explícita para la secuencia es $a_n = -3 - 2n$.

b. La regla recurrente representa una secuencia geométrica cuyo primer término es $a_1 = 10$ y cuya razón común es $r = 2$.

$a_n = a_1r^{n-1}$ Regla explícita para una secuencia geométrica

$a_n = 10(2)^{n-1}$ Sustituye 10 por a_1 y 2 por r.

▶ Una regla explícita para la secuencia es $a_n = 10(2)^{n-1}$.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

Escribe una regla recurrente para la secuencia.

9. $a_n = 17 - 4n$ **10.** $a_n = 16(3)^{n-1}$

Escribe una regla explícita para la secuencia.

11. $a_1 = -12$, $a_n = a_{n-1} + 16$ **12.** $a_1 = 2$, $a_n = -6a_{n-1}$

Resolver problemas de la vida real

EJEMPLO 6 Resolver un problema de la vida real

Un lago contiene inicialmente 5200 peces. Cada año, la población disminuye en un 30% debido a la pesca y a otras causas, así que se repuebla el lago con 400 peces.

a. Escribe una regla recurrente para el número a_n de peces al inicio del enésimo año.

b. Halla el número de peces al inicio del quinto año.

c. Describe qué pasa con la población de peces con el tiempo.

SOLUCIÓN

a. Escribe una regla recurrente. El valor inicial es 5200. Dado que la población disminuye en un 30% cada año, el 70% de los peces permanecen en el lago de un año al siguiente. Además, se añaden 400 peces cada año. A continuación encontrarás un modelo verbal para la ecuación recurrente.

Peces al inicio del del año n	$= 0.7 \cdot$	Peces al inicio del del año $n-1$	$+$	Nuevos peces añadidos
a_n	$= 0.7 \cdot$	a_{n-1}	$+$	400

▶ Una regla recursiva es $a_1 = 5200$, $a_n = (0.7)a_{n-1} + 400$.

b. Halla el número de peces al inicio del quinto año. Ingresa 5200 (el valor de a_1) en una calculadora gráfica. Luego ingresa la regla

$.7 \times \text{Ans} + 400$

para hallar a_2. Presiona la tecla enter tres veces más para hallar $a_5 \approx 2262$.

```
5200
                 5200
.7*Ans+400
                 4040
                 3228
               2659.6
              2261.72
```

▶ Hay aproximadamente 2262 peces en el lago al inicio del quinto año.

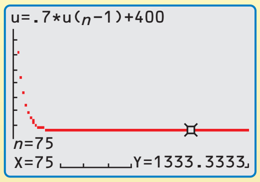
c. Describe lo que pasa con la población de peces con el tiempo. Sigue presionando enter en la calculadora. La pantalla a la derecha muestra las poblaciones de peces para los años 44 a 50. Observa que la población de peces se acerca a 1333.

```
1333.334178
1333.333924
1333.333747
1333.333623
1333.333536
1333.333475
1333.333433
```

▶ Con el tiempo, la población de peces en el lago se estabiliza en aproximadamente 1333 peces.

Verifica

Configura la calculadora en modos *secuencia* y *punto*. Haz la gráfica de la secuencia y usa la función *trazar*. Con base en la gráfica, parece que la secuencia se acerca a 1333.



Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

13. ¿QUÉ PASA SI? En el Ejemplo 6, supón que el 75% de los peces permanecen cada año. ¿Qué pasa con la población de peces con el tiempo?

EJEMPLO 7 Representar con matemáticas

> **RECUERDA**
> En la Sección 8.3, usaste una fórmula que incluía una serie geométrica para calcular el pago mensual de un préstamo similar.

Pides prestados \$150,000 a una tasa de interés anual de 6% compuesta mensualmente durante 30 años. El pago mensual es de \$899.33.

- Halla el balance después del tercer pago.
- Debido al redondeo de los cálculos, el último pago a menudo es diferente del pago original. Halla el monto del último pago.

SOLUCIÓN

1. **Comprende el problema** Te dan las condiciones de un préstamo. Te piden que halles el balance después del tercer pago y el monto del último pago.

2. **Haz un plan** Dado que el balance después de cada pago depende del balance después del pago anterior, escribe una regla recurrente que dé el balance después de cada pago. Luego usa una hoja de cálculo para hallar el balance después de cada pago, redondeado al centavo más cercano.

3. **Resuelve el problema** Dado que la tasa de interés mensual es $\frac{0.06}{12} = 0.005$, el balance aumenta por un factor de 1.005 cada mes, y entonces se resta el pago de \$899.33.

$$\text{Balance después del pago} = 1.005 \bullet \text{Balance antes del pago} - \text{Pago}$$

$$a_n = 1.005 \bullet a_{n-1} - 899.33$$

Usa una hoja de cálculo y la regla recursiva para hallar el balance después del tercer pago y después del pago 359.

	A	B	
1	Número de pago	Balance después del pago	
2	1	149850.67	B2 =Redondeo(1.005*150000−899.33, 2)
3	2	149700.59	B3 =Redondeo(1.005*B2−899.33, 2)
4	3	149549.76	⋮
358	357	2667.38	
359	358	1781.39	
360	359	890.97	B360 =Redondeo(1.005*B359−899.33, 2)

▶ El balance después del tercer pago es \$149,549.76. El balance después del pago 359 es \$890.97, entonces el pago final es de 1.005(890.97) = \$895.42.

4. **Verifícalo** Al continuar la hoja de cálculo para el pago 360 usando el pago mensual original de \$899.33, el balance es −3.91.

361	360	−3.91	B361 =Redondeo(1.005*B360−899.33, 2)

Esto demuestra un sobrepago de \$3.91. Entonces, es razonable que el último pago sea de \$899.33 − \$3.91 = \$895.42.

Monitoreo del progreso

Ayuda en inglés y español en *BigIdeasMath.com*

14. ¿QUÉ PASA SI? ¿Cómo cambian las respuestas del Ejemplo 7 si la tasa de interés anual es de 7.5% y el pago mensual es de \$1048.82?

8.5 Ejercicios

Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

Verificación de vocabulario y concepto esencial

1. **COMPLETAR LA ORACIÓN** Una __________ recurrente indica cómo se relaciona el enésimo término de una secuencia con uno o más términos precedentes.

2. **ESCRIBIR** Explica la diferencia entre una regla explícita y una regla recurrente para una secuencia.

Monitoreo del progreso y Representar con matemáticas

En los Ejercicios 3–10, escribe los primeros seis términos de la secuencia. *(Consulta el Ejemplo 1).*

3. $a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} + 3$

4. $a_1 = 1$
$a_n = a_{n-1} - 5$

5. $f(0) = 4$
$f(n) = 2f(n - 1)$

6. $f(0) = 10$
$f(n) = \frac{1}{2}f(n - 1)$

7. $a_1 = 2$
$a_n = (a_{n-1})^2 + 1$

8. $a_1 = 1$
$a_n = (a_{n-1})^2 - 10$

9. $f(0) = 2, f(1) = 4$
$f(n) = f(n - 1) - f(n - 2)$

10. $f(1) = 2, f(2) = 3$
$f(n) = f(n - 1) \cdot f(n - 2)$

En los Ejercicios 11–22, escribe una regla recursiva para la secuencia. *(Consulta los Ejemplos 2 y 3).*

11. $21, 14, 7, 0, -7, \ldots$

12. $54, 43, 32, 21, 10, \ldots$

13. $3, 12, 48, 192, 768, \ldots$

14. $4, -12, 36, -108, \ldots$

15. $44, 11, \frac{11}{4}, \frac{11}{16}, \frac{11}{64}, \ldots$

16. $1, 8, 15, 22, 29, \ldots$

17. $2, 5, 10, 50, 500, \ldots$

18. $3, 5, 15, 75, 1125, \ldots$

19. $1, 4, 5, 9, 14, \ldots$

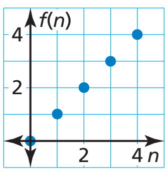
20. $16, 9, 7, 2, 5, \ldots$

21. $6, 12, 36, 144, 720, \ldots$

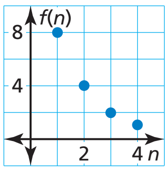
22. $-3, -1, 2, 6, 11, \ldots$

En los Ejercicios 23–26, escribe una regla recursiva para la secuencia que se muestra en la gráfica.

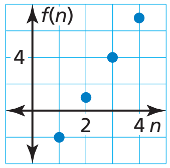
23.



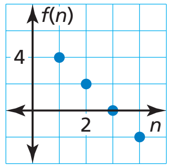
24.



25.



26.



ANÁLISIS DE ERRORES **En los Ejercicios 27 y 28, describe y corrige el error cometido al escribir una regla recurrente para la secuencia 5, 2, 3, −1, 4, . . .**

27.

Comenzando con el tercer término en la secuencia, cada término a_n equivale a $a_{n-2} - a_{n-1}$. Entonces, una regla recursiva está dada por

$a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$.

28.

Comenzando por el segundo término en la secuencia, cada término a_n equivale a $a_{n-1} - 3$. Entonces, una regla recursiva está dada por

$a_1 = 5, a_n = a_{n-1} - 3$.

En los Ejercicios 29–38, escribe una regla recursiva para la secuencia. *(Consulta el Ejemplo 4).*

29. $a_n = 3 + 4n$

30. $a_n = -2 - 8n$

31. $a_n = 12 - 10n$

32. $a_n = 9 - 5n$

33. $a_n = 12(11)^{n-1}$

34. $a_n = -7(6)^{n-1}$

35. $a_n = 2.5 - 0.6n$

36. $a_n = -1.4 + 0.5n$

37. $a_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

38. $a_n = \frac{1}{4}(5)^{n-1}$

39. REESCRIBIR UNA FÓRMULA Has ahorrado \$82 para comprar una bicicleta. Ahorras \$30 adicionales cada mes. La regla explícita $a_n = 30n + 82$ da el monto ahorrado después de n meses. Escribe una regla recurrente para el monto que has ahorrado n meses desde ahora.

40. REESCRIBIR UNA FÓRMULA Tu salario está dado por la regla explícita $a_n = 35{,}000(1.04)^{n-1}$, donde n es el número de años que has trabajado. Escribe una regla recursiva para tu salario.

En los Ejercicios 41–48, escribe una regla explícita para la secuencia. *(Consulta el Ejemplo 5).*

41. $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} - 6$

42. $a_1 = 16,\ a_n = a_{n-1} + 7$

43. $a_1 = -2,\ a_n = 3a_{n-1}$

44. $a_1 = 13,\ a_n = 4a_{n-1}$

45. $a_1 = -12,\ a_n = a_{n-1} + 9.1$

46. $a_1 = -4,\ a_n = 0.65a_{n-1}$

47. $a_1 = 5,\ a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3}$

48. $a_1 = -5,\ a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$

49. REESCRIBIR UNA FÓRMULA Un supermercado exhibe latas en un arreglo en forma de pirámide con 20 latas en la fila inferior y dos latas menos en cada fila superior subsecuente. El número de latas en cada fila está representado por la regla recurrente $a_1 = 20$, $a_n = a_{n-1} - 2$. Escribe una regla explícita para el número de latas en la fila n.

50. REESCRIBIR UNA FÓRMULA El valor de un carro está dado por la regla recurrente $a_1 = 25{,}600$, $a_n = 0.86a_{n-1}$, donde n es el número de años desde que el carro era nuevo. Escribe una regla explícita para el valor del carro después de n años.

51. USAR LA ESTRUCTURA ¿Cuál es el milésimo término de la secuencia cuyo primer término es $a_1 = 4$ y cuyo enésimo término es $a_n = a_{n-1} + 6$? Justifica tu respuesta.

Ⓐ 4006 Ⓑ 5998

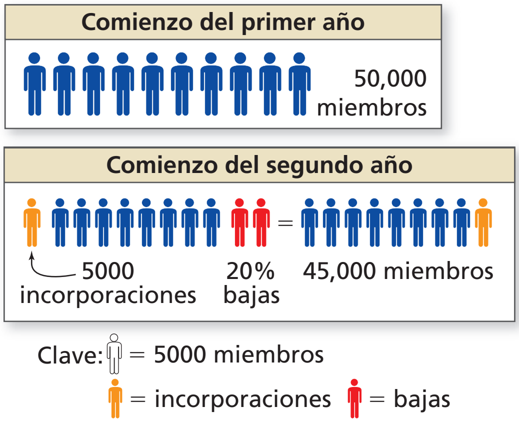
Ⓒ 1010 Ⓓ 10,000

52. USAR LA ESTRUCTURA ¿Cuál es el término 873 de la secuencia cuyo primer término es $a_1 = 0.01$ y cuyo enésimo término es $a_n = 1.01a_{n-1}$? Justifica tu respuesta.

Ⓐ 58.65 Ⓑ 8.73

Ⓒ 1.08 Ⓓ 586,459.38

53. RESOLVER PROBLEMAS Un servicio de música en línea tiene inicialmente 50,000 miembros. Cada año, la compañía pierde el 20% de sus miembros actuales y gana 5000 miembros nuevos. *(Consulta el Ejemplo 6).*

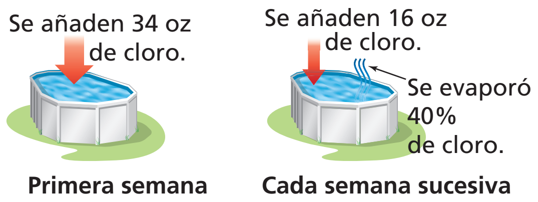


a. Escribe una regla recursiva para el número a_n de miembros al inicio del enésimo año.

b. Halla el número de miembros al inicio del quinto año.

c. Describe lo que pasa con el número de miembros a través del tiempo.

54. RESOLVER PROBLEMAS Añades cloro a una piscina. La primera semana añades 34 onzas de cloro, y 16 onzas la siguiente semana en adelante. Cada semana se evapora el 40% del cloro de la piscina.



a. Escribe una regla recurrente para la cantidad de cloro en la piscina al inicio de la enésima semana.

b. Halla la cantidad de cloro en la piscina al inicio de la tercera semana.

c. Describe lo que pasa con la cantidad de cloro en la piscina con el tiempo.

55. FINAL ABIERTO Da un ejemplo de una situación de la vida real que puedas representar con una regla recurrente que no se acerque a un límite. Escribe una regla recurrente que represente la situación.

56. FINAL ABIERTO Da un ejemplo de una secuencia en la que cada término después del tercer término sea una función de los tres términos que lo preceden. Escribe una regla recurrente para la secuencia y halla sus primeros ocho términos.

57. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Pides prestados \$2000 a una tasa de interés anual del 9% compuesto mensualmente durante 2 años. El pago mensual es de \$91.37. *(Consulta el Ejemplo 7).*

a. Halla el balance después del quinto pago.

b. Halla el monto del último pago.

58. **REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS** Pides prestados \$10,000 para construir un dormitorio adicional en tu casa. El préstamo está asegurado por 7 años a una tasa de interés anual de 11.5%. El pago mensual es de \$173.86.

a. Halla el balance después del cuarto pago.

b. Halla el monto del último pago.

59. **COMPARAR MÉTODOS** En 1202, el matemático Leonardo Fibonacci escribió *Liber Abaci*, donde propuso el siguiente problema sobre conejos:

Comienza con una pareja de conejos recién nacidos. Cuando la pareja de conejos tienen dos meses, los conejos comienzan a producir una nueva pareja de conejos cada mes. Presupón que ninguno de los conejos muere.

Mes	1	2	3	4	5	6
Parejas al comienzo del mes	1	1	2	3	5	8

Este problema produce una secuencia denominada secuencia Fibonacci, que tiene tanto una fórmula recursiva como una fórmula explicita, que son las siguientes:

Recurrente: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

Explícita: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 1$

Usa cada fórmula para determinar cuántos conejos habrá después de un año. Justifica tus respuestas.

60. **USAR HERRAMIENTAS** Una biblioteca de pueblo tiene inicialmente 54,000 libros en su colección. Cada año se descartan o se pierde el 2% de los libros. La biblioteca puede permitirse comprar 1150 libros nuevos cada año.

a. Escribe una regla recursiva para el número a_n de libros en la biblioteca al inicio del enésimo año.

b. Usa el modo *secuencia* y el modo *punto* de una calculadora gráfica para hacer la gráfica de la secuencia. ¿Qué pasa con el número de libros de la biblioteca con el tiempo? Explica.

61. **SACAR CONCLUSIONES** Un vivero de árboles tiene inicialmente 9000 árboles. Cada año se cosecha el 10% de los árboles y se plantan 800 plantones.

a. Escribe una regla recurrente para el número de árboles en el vivero al inicio del enésimo año.

b. ¿Qué pasa con el número de árboles después de un largo periodo de tiempo?

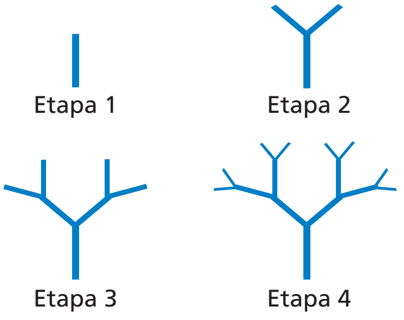
62. **SACAR CONCLUSIONES** Te tuerces el tobillo y tu médico prescribe 325 miligramos de un medicamento antiinflamatorio cada 8 horas durante 10 días. El 60% del medicamento se elimina del torrente sanguíneo cada 8 horas.

a. Escribe una regla recurrente para la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo después de n dosis.

b. El valor al que se acerca un nivel de medicamento después de un largo periodo de tiempo se denomina *nivel de mantenimiento*. ¿Cuál es el nivel de mantenimiento de este medicamento dada la dosis prescrita?

c. ¿Cómo afecta duplicar la dosis el nivel de mantenimiento del medicamento? Justifica tu respuesta.

63. **HALLAR UN PATRÓN** Un árbol fractal comienza con una sola rama (el tronco). En cada etapa, cada rama nueva de la etapa anterior desarrolla dos ramas más, tal como se muestra.



a. Enumera el número de ramas nuevas en cada una de las primeras siete etapas. ¿Qué tipo de secuencia forman estos números?

b. Escribe una regla explícita y una regla recurrente para la secuencia en la parte (a).

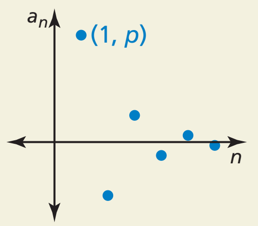
64. ESTIMULAR EL PENSAMIENTO Imagina que $a_1 = 34$. Luego escribe los términos de la secuencia hasta que descubras un patrón.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{si } a_n \text{ es par} \\ 3a_n + 1, & \text{si } a_n \text{ es impar} \end{cases}$$

Haz lo mismo para $a_1 = 25$. ¿A qué conclusión puedes llegar?

65. REPRESENTAR CON MATEMÁTICAS Haces un pago inicial de $500 para un anillo de diamantes de $3500. Pides prestado el balance restante a un interés anual de 10% compuesto mensualmente. El pago mensual es $213.59. ¿Cuánto tiempo demora devolver el préstamo? ¿Cuál es el monto del último pago? Justifica tus respuestas.

66. ¿CÓMO LO VES? La gráfica muestra los primeros seis términos de la secuencia $a_1 = p$, $a_n = ra_{n-1}$.



a. Describe lo que pasa con los valores en la secuencia al aumentar n.

b. Describe el conjunto de valores posibles para r. Explica tu razonamiento.

67. RAZONAR La regla para una secuencia recurrente es la siguiente:

$$f(1) = 3, f(2) = 10$$
$$f(n) = 4 + 2f(n - 1) - f(n - 2)$$

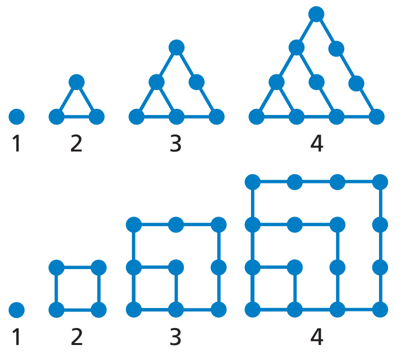
a. Escribe los primeros cinco términos de la secuencia.

b. Usa diferencias finitas para hallar un patrón. ¿Qué tipo de relación muestran los términos de la secuencia?

c. Escribe una regla explícita para la secuencia.

68. ARGUMENTAR Tu amigo dice que es imposible escribir una regla recurrente para una secuencia que no es ni aritmética ni geométrica. ¿Es correcto lo que dice tu amigo? Justifica tu respuesta.

69. PENSAMIENTO CRÍTICO Los primeros cuatro números triangulares T_n y los primero cuatro números cuadrados S_n están representados por los puntos en cada diagrama.



a. Escribe una regla explícita para cada secuencia.

b. Escribe una regla recurrente para cada secuencia.

c. Escribe una regla para los números cuadrados en términos de los números triangulares. Dibuja diagramas para explicar por qué esta regla es verdadera.

70. PENSAMIENTO CRÍTICO Ahorras dinero para tu jubilación. Planeas retirar $30,000 al inicio de cada año durante 20 años después de jubilarte. Basándote en el tipo de inversión que estás haciendo, puedes esperar ganar un retorno anual de 8% sobre tus ahorros después de jubilarte.

a. Imagina que a_n es tu balance n años después de jubilarte. Escribe una ecuación recursiva que muestre cómo a_n se relaciona con a_{n-1}.

b. Resuelve la ecuación de la parte (a) para a_{n-1}. Halla a_0, la cantidad mínima de dinero que deberías tener en tu cuenta cuando te jubiles. (*Consejo:* Imagina que $a_{20} = 0$.)

Mantener el dominio de las matemáticas

Repasar lo que aprendiste en grados y lecciones anteriores

Resuelve la ecuación. Verifica tu solución. *(Sección 5.4)*

71. $\sqrt{x} + 2 = 7$

72. $2\sqrt{x} - 5 = 15$

73. $\sqrt[3]{x} + 16 = 19$

74. $2\sqrt[3]{x} - 13 = -5$

Las variables x y y son inversamente proporcionales. Usa los valores dados para escribir una ecuación que relacione x y y. Luego halla y cuando $x = 4$. *(Sección 7.1)*

75. $x = 2, y = 9$

76. $x = -4, y = 3$

77. $x = 10, y = 32$

8.4–8.5 ¿Qué aprendiste?

Vocabulario Esencial

suma parcial, *pág. 436*
regla explícita, *pág. 442*
regla recurrente, *pág. 442*

Conceptos Esenciales

Sección 8.4

Sumas parciales de series geométricas infinitas, *pág. 436*
La suma de una serie geométrica infinita, *pág. 437*

Sección 8.5

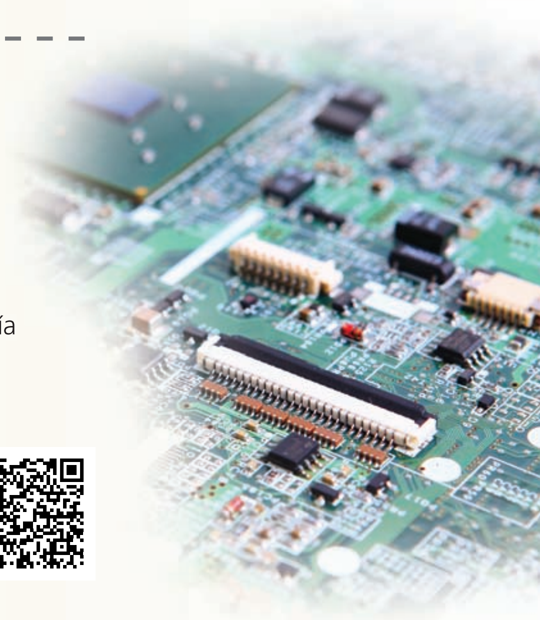
Evaluar reglas recurrentes, *pág. 442*
Ecuaciones recurrentes para secuencias aritméticas y geométricas, *pág. 442*
Diferenciar entre las reglas recurrentes y explícitas, *pág. 444*

Prácticas matemáticas

1. Describe cómo el rotular los ejes en los Ejercicios 3–6 de la página 439 aclara la relación entre las cantidades en los problemas.
2. ¿Qué progresión lógica de argumentos puedes usar para determinar si el enunciado en el Ejercicio 30 de la página 440 es verdadero?
3. Describe cómo la estructura de la ecuación presentada en el Ejercicio 40 de la página 448 te permite determinar el salario inicial y el aumento que recibes cada año.
4. ¿Tiene sentido la regla recurrente en el Ejercicio 61 de la página 449 cuando $n = 5$? Explica tu razonamiento.

Tarea de desempeño

Circuitos integrados y la Ley de Moore



En abril de 1965, un ingeniero llamado Gordon Moore observó lo rápido que se reducía el tamaño de los artículos electrónicos. Predijo cómo el número de transistores que cabrían en un diámetro de 1 pulgada aumentaría con el tiempo. En 1965, solo cabían 50 transistores en el circuito. Una década después, aproximadamente 6400 transistores cabían en el circuito. La predicción de Moore fue precisa y ahora se conoce como la Ley de Moore. ¿Cuál fue su predicción? ¿Cuántos transistores cabrán en un circuito de 1 pulgada cuando te gradúes de la secundaria?

Para explorar las respuestas a esta pregunta y más, visita ***BigIdeasMath.com***.

8 Repaso del capítulo

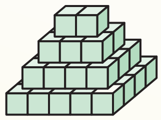
Soluciones dinámicas disponibles en *BigIdeasMath.com*

8.1 Definir y usar secuencias y series (págs. 409–416)

Halla la suma $\sum_{i=1}^{4}(i^2 - 3)$.

$$\sum_{i=1}^{4}(i^2 - 3) = (1^2 - 3) + (2^2 - 3) + (3^2 - 3) + (4^2 - 3)$$
$$= -2 + 1 + 6 + 13$$
$$= 18$$

1. Describe el patrón que se muestra en la figura. Luego escribe una regla para la enésima capa de la figura, donde $n = 1$ representa la capa superior.



Escribe la serie usando la notación de sumatoria.

2. $7 + 10 + 13 + \cdots + 40$

3. $0 + 2 + 6 + 12 + \cdots$

Halla la suma.

4. $\sum_{i=2}^{7}(9 - i^3)$

5. $\sum_{i=1}^{46} i$

6. $\sum_{i=1}^{12} i^2$

7. $\sum_{i=1}^{5} \frac{3 + i}{2}$

8.2 Analizar secuencias y series aritméticas (págs. 417–424)

Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia 9, 14, 19, 24 . . . Luego halla a_{14}.

La secuencia es aritmética, su primer término es $a_1 = 9$ y su diferencia común es $d = 14 - 9 = 5$. Entonces una regla para el enésimo término es

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ — Escribe la regla general.

$= 9 + (n - 1)5$ — Sustituye 9 por a_1 y 5 por d.

$= 5n + 4.$ — Simplifica.

▶ Una regla es $a_n = 5n + 4$, y el decimocuarto término es $a_{14} = 5(14) + 4 = 74$.

8. Indica si la secuencia 12, 4, −4, −12, −20, . . . es aritmética. Explica tu razonamiento.

Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia aritmética. Luego haz una gráfica de los seis primeros términos de la secuencia.

9. 2, 8, 14, 20, . . .

10. $a_{14} = 42, d = 3$

11. $a_6 = -12, a_{12} = -36$

12. Halla la suma $\sum_{i=1}^{36}(2 + 3i)$.

13. Aceptas un empleo con un salario inicial de $37,000. Tu empleador te ofrece un aumento anual de $1500 por los próximos 6 años. Escribe una regla para tu salario en el enésimo año. ¿Cuál es tu ganancia total en 6 años?

8.3 Analizar secuencias y series geométricas (págs. 425–432)

Halla la suma $\sum_{i=1}^{8} 6(3)^{i-1}$.

Paso 1 Halla el primer término y la razón común.

$a_1 = 6(3)^{1-1} = 6$ Identifica el primer término.

$r = 3$ Identifica la razón común.

Paso 2 Halla la suma.

$S_8 = a_1\left(\frac{1-r^8}{1-r}\right)$ Escribe la regla para S_8.

$= 6\left(\frac{1-3^8}{1-3}\right)$ Sustituye 6 por a_1 y 3 por r.

$= 19{,}680$ Simplifica.

14. Indica si la secuencia 7, 14, 28, 56, 112, . . . es geométrica. Explica tu razonamiento.

Escribe una regla para el enésimo término de la secuencia geométrica. Luego haz una gráfica de los primeros seis términos de la secuencia.

15. $25, 10, 4, \frac{8}{5}, \ldots$

16. $a_5 = 162, r = -3$

17. $a_3 = 16, a_5 = 256$

18. Halla la suma $\sum_{i=1}^{9} 5(-2)^{i-1}$.

8.4 Hallar sumas de series geométricas infinitas (págs. 435–440)

Halla la suma de la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1}$, si existe.

Para esta serie, $a_1 = 1$ y $r = \frac{4}{5}$. Dado que $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$, la suma de la serie existe.

La suma de la serie es

$S = \frac{a_1}{1-r}$ Fórmula para la suma de una serie geométrica infinita

$= \frac{1}{1-\frac{4}{5}}$ Sustituye 1 por a_1 y $\frac{4}{5}$ por r.

$= 5.$ Simplifica.

19. Considera la serie geométrica infinita $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \ldots$. Halla y haz una gráfica de las sumas parciales S_n para $n = 1, 2, 3, 4,$ y 5. Luego describe lo que pasa con S_n cuando n aumenta.

20. Halla la suma de la serie geométrica infinita $-2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots$, si existe.

21. Escribe el decimal periódico 0.1212 . . . como fracción en su mínima expresión.

8.5 Usar reglas recurrentes con las secuencias *(págs. 441–450)*

a. Escribe los seis primeros términos de la secuencia $a_0 = 46$, $a_n = a_{n-1} - 8$.

$a_0 = 46$ 1^er^ término

$a_1 = a_0 - 8 = 46 - 8 = 38$ 2^do^ término

$a_2 = a_1 - 8 = 38 - 8 = 30$ 3^er^ término

$a_3 = a_2 - 8 = 30 - 8 = 22$ 4^to^ término

$a_4 = a_3 - 8 = 22 - 8 = 14$ 5^to^ término

$a_5 = a_4 - 8 = 14 - 8 = 6$ 6^to^ término

b. Escribe una regla recurrente para la secuencia 6, 10, 14, 18, 22, ...

Usa una tabla para organizar los términos y hallar el patrón.

n	1	2	3	4	5
a_n	6	10	14	18	22

+4 +4 +4 +4

La secuencia es aritmética, su primer término es $a_1 = 6$ y su diferencia común es $d = 4$.

$a_n = a_{n-1} + d$ Ecuación recurrente para una secuencia aritmética

$= a_{n-1} + 4$ Sustituye 4 por *d*.

► Una regla recurrente para la secuencia es $a_1 = 6$, $a_n = a_{n-1} + 4$.

Escribe los seis primeros términos de la secuencia.

22. $a_1 = 7$, $a_n = a_{n-1} + 11$

23. $a_1 = 6$, $a_n = 4a_{n-1}$

24. $f(0) = 4$, $f(n) = f(n-1) + 2n$

Escribe una regla recurrente para la secuencia.

25. $9, 6, 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \ldots$

26. 2, 2, 4, 12, 48, . . .

27. 7, 3, 4, −1, 5, . . .

28. Escribe una regla recurrente para $a_n = 105\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$.

Escribe una regla explícita para la secuencia.

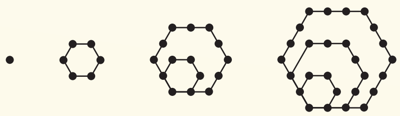
29. $a_1 = -4$, $a_n = a_{n-1} + 26$

30. $a_1 = 8$, $a_n = -5a_{n-1}$

31. $a_1 = 26$, $a_n = \frac{2}{5}a_{n-1}$

32. La población de un pueblo aumenta a una tasa de aproximadamente 4% por año. En 2010, el pueblo tenía una población de 11,120. Escribe una regla recurrente para la población P_n del pueblo en el año n. Imagina que $n = 1$ representa 2010.

33. Los números 1, 6, 15, 28, . . . se denominan números hexagonales porque representan el número de puntos usados para marcar hexágonos, tal como se muestra. Escribe una regla recurrente para el enésimo número hexagonal.



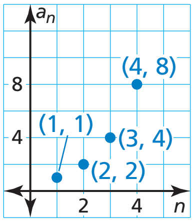
8 Prueba del capítulo

Halla la suma.

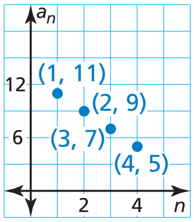
1. $\sum_{i=1}^{24}(6i - 13)$ **2.** $\sum_{n=1}^{16} n^2$ **3.** $\sum_{k=1}^{\infty} 2(0.8)^{k-1}$ **4.** $\sum_{i=1}^{6} 4(-3)^{i-1}$

Determina si la gráfica representa una secuencia aritmética, una secuencia geométrica o ninguna de las dos. Explica tu razonamiento. Luego escribe una regla para el enésimo término.

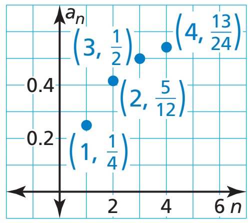
5.



6.



7.



Escribe una regla recurrente para la secuencia. Luego halla a_9.

8. $a_1 = 32, r = \frac{1}{2}$ **9.** $a_n = 2 + 7n$ **10.** $2, 0, -3, -7, -12, \ldots$

11. Escribe una regla recurrente para la secuencia $5, -20, 80, -320, 1280, \ldots$ Luego escribe una regla explícita para la secuencia usando tu regla recurrente.

12. Los números a, b, y c son los tres primeros términos de una secuencia aritmética. ¿Es b la mitad de la suma de a y c? Explica tu razonamiento.

13. Usa el patrón de los edredones a cuadros que se muestra.

$n = 1, a_n = 1$ $n = 2, a_n = 2$ $n = 3, a_n = 5$ $n = 4, a_n = 8$

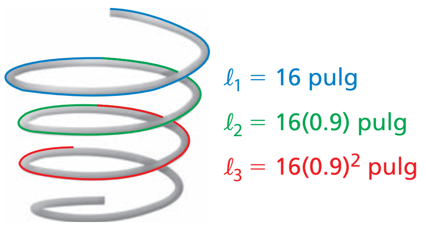
a. ¿Qué representa n para cada edredón? ¿Qué representa a_n?

b. Haz una tabla que muestre n y a_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8.

c. Usa la regla $a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{4}[1 - (-1)^n]$ para hallar a_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8. Compara estos valores con los de tu tabla en la parte (b). ¿A qué conclusión puedes llegar? Explica.

14. Durante una temporada de béisbol, una compañía se compromete a donar \$5000 a una organización caritativa más \$100 por cada jonrón anotado por el equipo local. ¿Esta situación representa una secuencia o una serie? Explica tu razonamiento.

15. La longitud ℓ_1 del primer bucle de un resorte es de 16 pulgadas. La longitud ℓ_2 del segundo bucle es 0.9 veces la longitud del primer bucle. La longitud ℓ_3 del tercer bucle es 0.9 veces la longitud del segundo bucle, y así sucesivamente. Supón que el resorte tiene bucles infinitos. ¿Esta longitud sería finita o infinita? Explica. Halla la longitud del resorte, si es posible.



8 Evaluación acumulativa

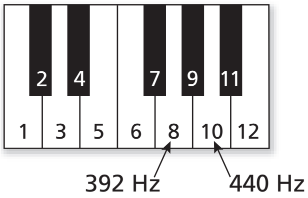
1. Las frecuencias (en Hertz) de las notas de un piano forman una secuencia geométrica. Las frecuencias de G (rotulada 8) y A (rotulada 10) se muestran en el diagrama. ¿Cuál es la frecuencia aproximada de Ebemol (rotulada 4)?

   Ⓐ 247 Hz

   Ⓑ 311 Hz

   Ⓒ 330 Hz

   Ⓓ 554 Hz



2. Sacas un préstamo de $16,000 con una tasa de interés de 0.75% por mes. Al final de cada mes, haces un pago de $300.

   a. Escribe una regla recurrente para el balance a_n del préstamo al inicio del enésimo mes.

   b. ¿Cuánto debes al inicio del decimoctavo mes?

   c. ¿Cuánto te demorarás en pagar la totalidad del préstamo?

   d. Si pagas $350 en vez de $300 cada mes, ¿cuánto te demorarás en pagar la totalidad del préstamo? ¿Cuánto dinero ahorrarás? Explica.

3. La tabla muestra que la fuerza F (en libras) necesaria para aflojar cierto perno con una llave inglesa, depende de la longitud ℓ (en pulgadas) del mango de la llave. Escribe una ecuación que relacione ℓ y F. Describe la relación.

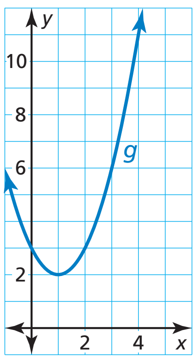
Longitud, ℓ	4	6	10	12
Fuerza, F	375	250	150	125

4. Ordena las funciones de la menor tasa de cambio promedio a la mayor tasa de cambio promedio en el intervalo $1 \leq x \leq 4$. Justifica tus respuestas.

   A. $f(x) = 4\sqrt{x} + 2$

   B. x y y son inversamente proporcionales y $y = 2$ cuando $x = 5$.

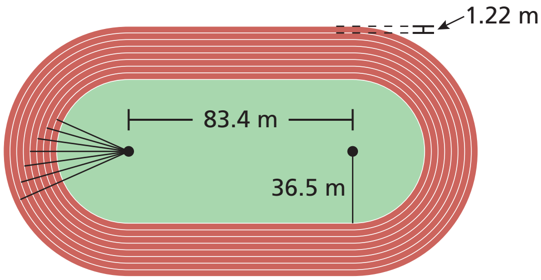
   C.



   D.

x	y
1	−4
2	−1
3	2
4	5

5. Una pista de carreras tiene la forma de un rectángulo con dos extremos semicirculares, tal como se muestra. La pista tiene 8 carriles de 1.22 metros de ancho cada uno. Los carriles están numerados del 1 al 8, comenzando desde el carril interior. La distancia desde el centro de un semicírculo hasta el interior de un carril se denomina el radio de curvatura de ese carril. El radio de curvatura del carril 1 es de 36.5 metros, tal como se muestra en la figura.



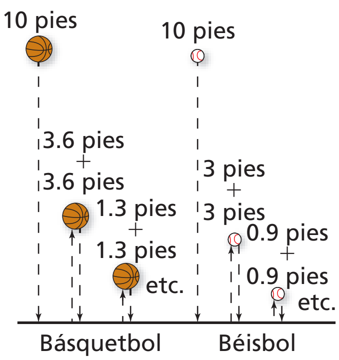
Dibujo no hecho a escala

a. ¿La secuencia formada por los radios de curvatura es asimétrica, geométrica o ninguna de las dos? Explica.

b. Escribe una regla para la secuencia formada por los radios de curvatura.

c. Los récords mundiales deben establecerse en carriles que tengan un radio de curvatura de 50 metros como máximo en el carril exterior. ¿La pista que se muestra cumple con el requisito? Explica.

6. El diagrama muestra las alturas de rebote de una pelota de básquetbol y una pelota de béisbol lanzadas desde una altura de 10 pies. En cada rebote, la pelota de básquetbol rebota hasta un 36% de su altura anterior y la pelota de béisbol rebota hasta un 30% de su altura anterior. ¿Aproximadamente cuánto mayor es la distancia total recorrida por la pelota de básquetbol que la distancia total recorrida por la pelota de béisbol?



Ⓐ 1.34 pies Ⓑ 2.00 pies

Ⓒ 2.68 pies Ⓓ 5.63 pies

7. Clasifica la(s) solución(es) de cada ecuación como números reales, números imaginarios o números imaginarios puros. Justifica tus respuestas.

a. $x + \sqrt{-16} = 0$ **b.** $(11 - 2i) - (-3i + 6) = 8 + x$ **c.** $3x^2 - 14 = -20$

d. $x^2 + 2x = -3$ **e.** $x^2 = 16$ **f.** $x^2 - 5x - 8 = 0$